蜂考速成课

《离散数学》

课时一　命题逻辑的基本概念

考点	重要程度	分值	题型
1. 命题	★★★	0～3	选择、填空
2. 命题联结词	★★★★★	3～6	填空
3. 命题公式及其赋值	★★★★	0～6	解答

1. 命题

1) 命题：能判断其真值的陈述句.

2) 真值：真、假.　　（1、0）

3) 真命题：真值为真的命题.

4) 假命题：真值为假的命题.

5) 原子命题（简单命题）：不能再被分解成更简单的命题.

6) 复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题.

判定给定句子是否为命题，应该分两步：

① 首先判定它是否为陈述句.

② 其次判断它是否有唯一真值.

题 1. 下列语句中，下面哪一个选项是命题？（　　）

A. 你今天有空吗？　　*B*. 请勿随地吐痰！

C. 我正在说谎.　　*D*. 2 是偶数.

答案：*D*.

2. 命题联结词

<table>
<tr><th>联结词</th><th>符号化</th><th colspan="3">真值表</th></tr>
<tr><td rowspan="3">否定</td><td rowspan="3">$\neg$</td><td>p</td><td colspan="2">$\neg p$</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">合取</td><td rowspan="5">$\wedge$</td><td>p</td><td>q</td><td>$p\wedge q$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">析取</td><td rowspan="5">$\vee$</td><td>p</td><td>q</td><td>$p\vee q$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">蕴涵</td><td rowspan="5">$\rightarrow$</td><td>p</td><td>q</td><td>$p\rightarrow q$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">等价</td><td rowspan="5">$\leftrightarrow$</td><td>p</td><td>q</td><td>$p\leftrightarrow q$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

优先顺序：( ),$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$

题 1. 将下列命题符号化.

1. 4 不是素数.

2. 小智和小红是学生.

3. 小智和小红是同学.

4. 小智是江苏人或者江西人.

5. 小红喜欢唱歌或跳舞.

6. ①只要a能被 4 整除，则a一定能被 2 整除.

②只有a能被 4 整除，则a才能被 2 整除.

③a能被 4 整除，仅当a能被 2 整除.

7. $2+3=5$的充要条件是$\sqrt{3}$是无理数.

答案：1. p:4 是素数.　　符号化为$\neg p$.

2. p: 小智是学生.　　q: 小红是学生.　　符号化为$p\wedge q$.

3. p: 小智和小红是同学.　　符号化为p.

4. p: 小智是江苏人.　　q: 小智是江西人.　　符号化为$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$.

5. p: 小红喜欢唱歌.　　q: 小红喜欢跳舞.　　符号化为$p\vee q$.

6. p:a能被4整除.　　q:a能被2整除.

①③ 符号化为$p\rightarrow q$.　　② 符号化为$q\rightarrow p$.

$p \longleftrightarrow q$

7. p:$2+3=5$.　　q:$\sqrt{3}$是无理数.　　符号化为$p\rightarrow q$.

$\wedge$：自然语言中的“既……，又……”“不但……，而且……”“虽然……，但是……”“一面……，一面……”等.

$\rightarrow$：“只要p，就q”，“因为p，所以q”，“p仅当q”，“只有q才p”，“除非q才p”，“除非q，否则非p”等等，符号化为$p\rightarrow q$.

$\leftrightarrow$：“当且仅当”，“……充要条件”等.

3. 命题公式及其赋值

1) 命题变元：取值 1（真）或 0（假）的变元.

2) 合式公式：将命题变元用联结词或圆括号按一定逻辑关系联结起来的符号串.

3) 设 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变元，给 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个赋值，若指定的一组值使 A 为 1，则称这组值为 A 的成真赋值；若使 A 为 0，则称这组值的成假赋值.

题 1. 写出下列公式的真值表，并求它们的成真赋值和成假赋值.

$(\neg p\wedge q)\to\neg r$

$(\neg p\wedge q)\to\neg r$ 的真值表

$p\ \ q\ \ r$	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	$\neg r$	$(\neg p\wedge q)\to\neg r$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	0
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	1

设 A 为任一命题公式

1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真，则称 A 为重言式或永真式.

2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假，则称 A 为矛盾式或永假式.

3) 若 A 不是矛盾式，则称 A 为可满足式.

课时一　练习题

1. 指出下列语句哪些是命题，哪些不是. 如果是命题，指出它的真值.

(1) 计算机有视觉吗？

(2) 明天我去看球赛.

(3) 请勿大声喧哗！

(4) 不存在最大的质数.

2. 下列语句是命题的有（　　）.

A. 明天下午开会吗？　　B. 2014 年元旦是星期六.

C. $5x+1>11$.　真值不确定　D. 请保持安静！

3. 下列句子中有（ C ）个命题.

(1) 我是老师.　(2) 禁止吸烟！　(3) 蚊子是鸟类动物.

(4) 我正在说谎.　(5) 月亮比地球大.

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

4. 将下列命题符号化.

(1) 王强身体很好，成绩也很好.　$p, q,\ p\wedge q$

(2) 小静只能挑选 202 或 203 房间.　$p, q,\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

(3) 如果 a 和 b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数.　$p, q, r.\ (p\wedge q)\rightarrow r$

5. （判断题）记 A：小李今天 18 岁，B：小李今年 19 岁，则“小李今年 18 岁或 19 岁”可以翻译成 $A\vee B$.　（×）

6. 设 P：我听课，Q：我做课堂笔记. 命题“我一边听课，一边做课堂笔记”符号化为 $P\wedge Q$.

7. 设 p 表示“天下大雨”，q 表示“他在室内运动”，则命题“除非天下大雨，否则他不在室内运动”符号化为（ C ）.　$q\rightarrow p$

A. $p\rightarrow q$　B. $p\wedge q$　C. $\neg p\rightarrow\neg q$　D. $\neg p\vee q$

8. n 个命题变元组成的命题公式共有 2^n 种不同真值指派情况.

9. 命题公式$(\neg P \to Q) \to (\neg Q \vee P)$中成真赋值的个数为（ D ）.

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ 2　　$D.$ 3

10. 下列命题公式中，哪个是永真式（ C ）.

$A.$ $p \wedge \neg q$　　$B.$ $p \to q$　　$C.$ $(\neg p \vee q) \vee p$　　$D.$ $(\neg p \wedge q) \wedge p$

11. 求命题公式$((Q \to P) \vee \neg R) \to (P \to (Q \vee R))$的真值表.

P	Q	R	$Q \to P$	$\neg R$	$((Q \to P) \vee \neg R)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	1	0	~~0~~	1	1
1	1	1	~~0~~	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1

课时二　命题逻辑等值演算

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 等值式	★★★★★	0～4	证明、解答
2. 析取范式与合取范式	★★★★	0～5	解答
3. 主析取范式与主合取范式	必考	5～8	填空、解答
4. 联结词的完备集	★★	0～2	判断、选择

1. 等值式

设 A,B 是两个命题公式，若 A,B 构成的等价式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A\Leftrightarrow B$.

常见等值式：

1) 双重否定律　$A\Leftrightarrow \neg\neg A$

2) 幂等律　$A\Leftrightarrow A\vee A$, $A\Leftrightarrow A\wedge A$

3) 交换律　$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

4) 结合律　$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

5) 分配律　$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　（$\vee$对$\wedge$的分配律）

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　（$\wedge$对$\vee$的分配律）

6) 德摩根律　$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

7) 吸收律　$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

8) 零律　$A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

9) 同一律　$A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

10) 排中律　$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

11） 矛盾律　　$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

12) 蕴涵等值式　　$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

13) 等价等值式　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

14) 假言易位　　$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

15) 等价否定等值式　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

16) 归谬论　　$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

题 1.推断公式类型$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$.

证明：　$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$

$\Leftrightarrow Q \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow Q \vee ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee P) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

因此，该公式是一个重言式或者永真式.

题 2.用等值演算法证明$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

证明：　$\neg(P \leftrightarrow Q)$

$\Leftrightarrow \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

得证.

2. 析取范式与合取范式

1) 文字：命题变元及其否定.

2) 简单析取式：仅由有限个文字构成的析取式.

3) 简单合取式：仅由有限个文字构成的合取式.

4) 析取范式：由有限个简单合取式的析取构成的命题式. $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_s$，其中 $A_i\,(i=1,2,\ldots,s)$ 是简单合取式.

5) 合取范式：由有限个简单析取式的合取构成的命题式. $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_t$，其中 $B_j\,(j=1,2,\ldots,t)$ 是简单析取式.

题 1：用等值演算法求取求下列公式：$(P \to Q) \leftrightarrow R$ 的合取范式和析取范式.

解：(1) 先求合取范式

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \leftrightarrow R \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \leftrightarrow R \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg P \vee Q) \to R) \wedge (R \to (\neg P \vee Q)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee (\neg P \vee Q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee Q)
\end{aligned}
$$

(2) 再求析取范式

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \leftrightarrow R \\
\Leftrightarrow\ & ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
& \vee (R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg R) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q)
\end{aligned}
$$

3. 主析取范式与主合取范式

在含有n个命题变元的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变元和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变元或它的否定式按照下标从小到大顺序排列，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

表 1　含p,q的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

表 2　含p,q,r的极小项与极大项

极小项			极大项		
且 公式	成真赋值	名称	或 公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

设m_i与M_i是命题变元含$p_1,p_2,\ldots,p_n$的极小项和极大项，则$\neg m_i\Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i\Leftrightarrow m_i$

所有简单合取式都是极小项的析取范式称为主析取范式.

所有简单析取式都是极大项的合取范式称为主合取范式.

题 1. 利用真值表法，按P,Q,R顺序求命题公式：$(P\wedge R)\to(\neg Q\vee R)$的主析取范式.

解：

$P\ \ Q\ \ R$	$P\wedge R$	$\neg Q$	$\neg Q\vee R$	$(P\wedge R)\to(\neg Q\vee R)$
0 0 0	0	1	1	1
0 0 1	0	1	1	1
0 1 0	0	0	0	1
0 1 1	0	0	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	1
1 1 1	1	0	1	1

因此，该命题公式的主析取范式是$m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$.

题 2. 含3个命题变项的命题公式的主合取范式为$M_0\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_6\wedge M_7$，则它的主析取范式为__________（表示成$m\vee n$的形式）.

答案：$m_1\vee m_2\vee m_5$.

题 3. 求命题公式$(P\to(Q\vee R))\to\neg Q$的主析取范式和主合取范式.

解：

$$
\begin{aligned}
&(P\to(Q\vee R))\to\neg Q\\
\Leftrightarrow&(\neg P\vee(Q\vee R))\to\neg Q\\
\Leftrightarrow&\ \neg(\neg P\vee Q\vee R)\vee\neg Q\\
\Leftrightarrow&(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee\neg Q\\
\Leftrightarrow&(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\\
&\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\\
\Leftrightarrow&m_0\vee m_1\vee m_4\vee m_5
\end{aligned}
$$

因此，该命题公式的主析取范式是$m_0\vee m_1\vee m_4\vee m_5$，

主合取范式是$m_2 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$.

4. 联结词的完备集

设S是一个联结词集合，如果一个命题公式都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是一个联结词完备集.

设p,q是两个命题，复合命题“p与q的否定式”称作p,q的与非式，记作$p\uparrow q$.

即$p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$，“$\uparrow$”称作与非联结词.

复合命题“p或q的否定式”称作p,q的或非式，记作$p\downarrow q$.

即$p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$，“$\downarrow$”称作或非联结词.

以下都是联结词完备集

$S_1=\{\neg,\wedge,\vee\}$

$S_2=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$

$S_3=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

$S_4=\{\neg,\wedge\}$

$S_5=\{\neg,\vee\}$

$S_6=\{\neg,\rightarrow\}$

$S_7=\{\uparrow\}$

$S_8=\{\downarrow\}$

题 1. (判断) 命题联结词集$\{\neg,\wedge\}$是联结词完备集. （ ）

答案：正确.

$(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\vee p)\vee(q\vee$

$(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$

课时二　练习题

1. 下列哪个公式是永假式（B）.

   A. $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$　　B. $p\wedge q\rightarrow p$

   C. $\neg(p\vee q)\wedge\neg(\neg p\wedge\neg q)$　　D. $\neg(p\vee q)$

2. 下列是重言式的为（A）.

   A. $p\rightarrow(p\vee q)$　　B. $(p\vee\neg p)\rightarrow q$　　C. $q\wedge\neg q$　　D. $p\rightarrow\neg q$　$\neg P(Q\wedge\neg P$

3. 求解$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$的公式类型？

   （永真、永假、可满足）$(\neg P\vee Q\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P\vee R)$

4. 给定命题公式：$(\neg P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)$，与之逻辑等价的是（D）.

   $(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

   A. $P\rightarrow(\neg Q\wedge R)$　　B. $P\rightarrow(Q\vee R)$　　C. $\neg P\rightarrow(Q\wedge R)$　　D. $P\rightarrow(Q\wedge R)$

5. 用等值演算法证明等值式$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\rightarrow(q\wedge r))$.

6. 任意两个不同大项的析取为________式，全体大项的合取式为________式.

7. 合式公式$\neg((P\vee Q)\rightarrow R)$的主合取范式为（~~D~~）. B

   A. $(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

   B. $(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$

   C. $(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

   D. $(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$

   $M_2 M_4 M_5 M_6$

8. 含3个命题变项的命题公式的主析取范式为$m_1\vee m_3\vee m_7$，则它的主合取范式________.

9. 构造命题公式$\neg P\vee(Q\wedge(P\rightarrow Q))$的真值表，并由此写出它的主析取范式和主合取范式.

10. 已知命题公式$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$，求主析取范式（要求通过等值演算推出）.

11. 某电路中有1个灯泡和3个开关A、B、C. 已知在且仅在下述4种情况下灯亮：

1) C的扳键向上，A、B的扳键向下；

2) A的扳键向上，B、C的扳键向下；

3) B、C的扳键向上，A的扳键向下；

4) A、B的扳键向上，C的扳键向下.

设G表示灯亮，p,q,r分别表示A、B、C扳键向上，求G的主析取和主合取范式.

12. 下面的联结词集合不是完备集的是________.

A. $\{\uparrow\}$ （$\uparrow$表示与非）

B. $\{\neg,\rightarrow\}$

C. $\{\neg,\leftrightarrow\}$

D. $\{\neg,\vee\}$

13. 联结词组中，下面哪一个选项是命题公式的最小联结词组（　　）.

A. $\{\neg\}$　　B. $\{\uparrow\}$　　C. $\{\wedge\}$　　D. $\{\vee,\wedge\}$

课时三　命题逻辑的推理理论

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 推理的相关公式	★★★★★	0～4	选择、填空
2. 自然推理系统 P	必考	6～10	证明

1. 推理的相关公式

1) 设 A 和 B 是两个命题公式，当且仅当 $A \to B$ 是重言式时，称从 A 可推出 B 或 B 是前提 A 的有效结论，记为 $A \Rightarrow B$.

2) 命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$ 为重言式.

3) 推理的形式结构：

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

①$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
②$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
③$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
④$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
⑤$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
⑥$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
⑦$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
⑧$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难（特殊形式）
⑨$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	破坏性二难

题 1. 求函数命题公式 A_1,A_2,A_3 推 B 的推理正确当且仅当__________为重言式.

答案：$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \to B$.

题 2. 下面不正确的是________.

$A.\ \neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$　　$B.\ P \Rightarrow P \vee Q$

$C.\ P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$　　$D.\ (P \to Q) \vee \neg Q \Rightarrow \neg P$

答案：D.

2. 自然推理系统 P

题 1：构造下面推理的证明.

前提：$p \vee q$，$p \to \neg r$，$s \to t$，$\neg s \to r$，$\neg t$

结论：q

证明：

① $\neg t$　　前提引入

② $s \to t$　　前提引入

③ $\neg s$　　①②拒取式

④ $\neg s \to r$　　前提引入

⑤ r　　③④假言推理

⑥ $p \to \neg r$　　前提引入

⑦ $\neg p$　　⑤⑥拒取式

⑧ $p \vee q$　　前提引入

⑨ q　　⑦⑧析取三段论

得证 q 是有效结论.

题2. 在自然推理系统中，构造并证明下列推理.（命题逻辑推理证明）

如果小王是理科生，则他的数学成绩一定很好. 如果小王不是文科生，则他一定是理科生. 小王的数学成绩不好. 所以，小王是文科生.

解：设简单命题

p：小王是理科生.

q：小王的数学成绩很好.

r：小王是文科生.

前提：$p \to q$，$\neg r \to p$，$\neg q$

结论：r

证明：

① $\neg q$　　前提引入

② $p \to q$　　前提引入

③ $\neg p$　　①②拒取式

④ $\neg r \to p$　　前提引入

⑤ r　　③④拒取式

得证r是有效结论.

题 3. 用推理的形式结构证明：

$A \vee B \to C \wedge D,\ D \vee E \to P \Rightarrow A \to P$

前提：$A \vee B \to C \wedge D,\ D \vee E \to P$

结论：$A \to P$

证明：

①	A	附加前提引入
②	$A \vee B$	①附加律
③	$A \vee B \to C \wedge D$	前提引入
④	$C \wedge D$	②③假言推理
⑤	D	④化简律
⑥	$D \vee E$	⑤附加律
⑦	$D \vee E \to P$	前提引入
⑧	P	⑥⑦假言推理

得证 $A \to P$ 是有效结论.

题4. 在自然推理系统P中构造下面推理的证明.

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队取胜；或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名；A队没有成为联赛的第一名；小张守第一垒. 因此，小李没向B队投球.

解：设简单命题

p：小张守第一垒.

q：小李向B队投球.

r：A队取胜.

s：A队成为联赛第一名.

前提：$(p\wedge q)\to r$, $\neg r\vee s$, $\neg s$, p

结论：$\neg q$

证明：用归谬法

①	q	结论的否定引入
②	p	前提引入
③	$p\wedge q$	①②合取
④	$(p\wedge q)\to r$	前提引入
⑤	r	③④假言推理
⑥	$\neg r\vee s$	前提引入
⑦	s	⑤⑥析取三段论
⑧	$\neg s$	前提引入
⑨	$s\wedge\neg s$	⑦⑧合取

由于最后一步$s\wedge\neg s\Rightarrow 0$，即$(((p\wedge q)\to r)\wedge(\neg r\vee s)\wedge\neg s\wedge p)\wedge q\Rightarrow 0$，所以推理正确.

课时三　练习题

1. 若推理正确，则推理的结论一定是正确的.（　）判断

2. 判断以下结论是否有效：前提是H_1：$P \to Q$, H_2：$\neg Q$，结论是：$\neg P$. ________（填“是”或“否”）

3. 下列4个推理中，不正确的是（　）.

   A. $A \Rightarrow (A \wedge B)$　　B. $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

   C. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$　　D. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

4. 在自然推理系统P中，用构造法证明下面推理.

   前提：$(p \wedge q) \to r$, $r \to s$, $\neg s$, p

   结论：$\neg q$

5. 如果小张去看电影，则当小王去看电影时，小李也去. 小赵不去看电影或小张去看电影. 小王去看电影. 所以当小赵去看电影时，小李也去.

6. 使用命题逻辑中的推理理论构造下面推理的证明：

   前提：$p \to (q \to s)$, q, $p \vee \neg r$

   结论：$r \to s$

7. 构造下面推理的证明：前提：$r \to \neg q$, $r \vee s$, $s \to \neg q$, $p \to q$，结论：$\neg p$.

8. 公安机关正在调查一宗盗窃案，现获得事实如下：

   (1) A或B盗窃了文物；

   (2) 若A盗窃了文物，则作案时间不可能在午夜前；

   (3) 若B证词正确，则在午夜前屋里灯光未灭；

   (4) 若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；

   (5) 午夜时屋里灯光灭了.

   试问谁是盗窃犯？试写出推导过程. 设P：“A盗窃了文物”，Q：“B盗窃了文物”，R：“作案时间发生在午夜前”，S：“午夜前屋里灯光灭了”，T：“B证词正确”.

课时四 谓词逻辑基本概念

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 谓词逻辑命题符号化	★★★★	0～5	选择、填空
2. 谓词逻辑公式及其解释	★★★	0～4	选择

1. 谓词逻辑命题符号化

个体词、谓词和量词是谓词逻辑命题符号化的3个基本要素.

1) 个体词

个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体.

将表示具体或特定的客体的个体词称作个体常项. 而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项. 并称个体变项的取值范围为个体域（或称作论域）.

全总个体域：由宇宙间一切事物组成的个体域.

2) 谓词：刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词.

题 1. 将下列命题在谓词逻辑中用谓词符号化，并讨论它们的真值.

(1) 只有2是素数，4才是素数.

(2) 如果5大于4，则4大于6.

解：(1) 设1元谓词$F(x)$：x是素数，命题可符号化为

$$F(4)\rightarrow F(2)$$

由于此蕴涵式的前件为假，所以命题为真.

(2) 设2元谓词$G(x,y)$：$x>y$，命题可符号化为

$$G(5,4)\rightarrow G(4,6)$$

由于$G(5,4)$为真，而$G(4,6)$为假，所以命题为假.

3) 量词：表示个体之间数量关系的词

全称量词：符号$\forall$，$\forall x$表示个体域中“所有的x”．

“一切的”“所有的”“每一个”“任意的”“凡”“都”等.

存在量词：符号$\exists$，$\exists x$表示个体域中有一个个体x．

“存在”“有一个”“有的”“至少有一个”等.

题 2：命题“所有的人都长着黑头发”，令$M(x)$：x是人；$G(x)$：x长着黑头发.则该命题符号化为（ ）.

$A.\ \forall x(M(x)\to G(x))$ $B.\ \exists x(M(x)\wedge G(x))$

$C.\ \exists x(M(x)\vee G(x))$ $D.\ \forall x(M(x)\wedge G(x))$

答案：A.

题 3.令$M(x)$：x是人；$G(x)$：x登上过月球.则命题“有的人登上过月球.”符号化（ ）.

$A.\ \forall x(M(x)\wedge G(x))$ $B.\ \exists x(M(x)\wedge G(x))$

$C.\ \forall x(M(x)\vee G(x))$ $D.\ \forall x(M(x)\to G(x))$

答案：B.

题 4.设有命题$T(x)$：x是火车，$C(x)$：x是汽车，$Q(x,y)$：x跑得比y快，那么命题“有的汽车比一些火车跑得快”的逻辑表达式是__________.

答案：$\exists x(C(x)\wedge\exists y(T(y)\wedge Q(x,y)))$.

题 5.设$F(x)$：x是运动员，$G(x)$：x是大学生，命题“不是所有的运动员都是大学生.”谓词符号化为__________.

答案：$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$或$\neg\forall x(F(x)\to G(x))$.

注：当多个量词出现时，它们的顺序一般不能随意调换.

2. 谓词逻辑公式及其解释

在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为指导变元，A为量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称作约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称作自由出现.

题 1. 指出下列各公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现以及约束出现的个体变项.

(1) $\forall x(F(x,y)\to G(x,z))$

(2) $\forall x(F(x)\to G(y))\to\exists y(H(x)\wedge L(x,y,z))$

解：(1)x是指导变元，量词$\forall$的辖域$A=(F(x,y)\to G(x,z))$. 在A中，x是约束出现，而且约束出现两次，y和z均为自由出现，各自由出现一次.

(2)公式中含 2 个量词，前件上的量词$\forall$的指导变元为x，$\forall$的辖域$(F(x)\to G(y))$，其中x是约束出现，y是自由出现. 后件中的量词$\exists$的指导变元为y，$\exists$的辖域为$(H(x)\wedge L(x,y,z))$，其中y是约束出现，x,z均为自由出现. 在整个公式中，x约束出现一次，自由出现两次，y自由出现一次，约束出现一次，z自由出现一次.

设A为一公式，若A在任何情况下的任何赋值下均为真，则称A为永真式或逻辑有效式；

若A在任何情况下的任何赋值下均为假，则称A为矛盾式或永假式.

若至少存在一个情况下的一个赋值使A为真，则称A是可满足式.

题 2. 设论域$D=\{a,b\}$，与公式$\exists xA(x)$等价的命题公式是（　　）.

$A.\ A(a)\wedge A(b)$　　$B.\ A(a)\to A(b)$　　$C.\ A(a)\vee A(b)$　　$D.\ A(b)\to A(a)$

答案：C.

课时四　练习题

1. 命题$\forall x \exists y(x^2+y^2=1)$的意义是（　　）.

   A. 对任何x均存在y使得$x^2+y^2=1$；　　B. 对任何y均存在x使得$x^2+y^2=1$；

   C. 存在y对任何x均使得$x^2+y^2=1$；　　D. 存在x对任何y均使得$x^2+y^2=1$；

2. 设$S(x)$：x是学生；$L(x)$：x喜欢英语.则命题“有些学生喜欢英语”的符号化为

   _____.

3. 设$A(x)$：x是人，$B(x)$：x犯错误，命题“没有不犯错误的人”符号化为（　　）.

   A. $\forall x(A(x) \wedge B(x))$　　B. $\neg \exists x(A(x) \to \neg B(x))$

   C. $\neg \exists x(A(x) \wedge B(x))$　　D. $\neg \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

4. 令$F(x)$：x是人，$G(y)$：y是花，$H(x,y)$：x喜欢y，则命题“有些人喜欢所有的花”可符号化为________.

   A. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \to H(x,y)))$

   B. $\exists x(\forall x F(x) \to (G(y) \to H(x,y)))$

   C. $\exists x(F(x) \to \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$

   D. $\exists x(F(x) \to \forall y(G(y) \to H(x,y)))$

5. 令$F(x)$：x是火车，$G(y)$：y是汽车，$H(x,y)$：x比y快，则命题“每列火车都比某些汽车快”在谓词逻辑中命题符号化为________.

6. 试把下列语句翻译为谓词演算公式.

   (1)某些人喜欢所有明星；　　(2)并非“所有人均喜欢某些某些电脑游戏”.

7. 设个体域$D=\{a,b\}$，消去公式$\exists x F(x) \to \forall y G(y)$中的量词为：__________.

8. 谓词公式$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists y(Q(y) \wedge \neg P(y))$中量词$\forall x$的辖域为（　　），量词$\exists y$的辖域为（　　）.

课时五 谓词逻辑等值演算与推理

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 谓词逻辑等值式与置换规则	★★★	0～4	选择、填空
2. 谓词逻辑前束范式	★★★★	0～4	选择、解答
3. 谓词逻辑推理理论	必考	6～12	证明

1. 谓词逻辑等值式与置换规则

设A,B是谓词逻辑中任意两个公式，若$A\leftrightarrow B$是永真式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$，称$A\Leftrightarrow B$是等值式.

下面给出谓词逻辑中的基本等值式.

1) 量词否定等值式

设公式$A(x)$含自由出现的个体变项x，则

①$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$

②$\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$

2) 量词辖域收缩与扩张等值式

设公式$A(x)$含自由出现的个体变项x，B不含x的自由出现，则

①$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

②$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

3) 量词分配等值式

设公式$A(x),B(x)$含自由出现的个体变项x，则

①$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

②$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

③$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

④$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

4) 命题逻辑中的重言式的代换实例都是谓词逻辑中的永真式. 例如：

$\forall xF(x)\Leftrightarrow\neg\neg\forall xF(x)$

$\forall x\exists y(F(x,y)\to G(x,y))\Leftrightarrow\neg\neg\forall x\exists y(F(x,y)\to G(x,y))$

$F(x)\to G(y)\Leftrightarrow\neg F(x)\vee G(y)$

$\forall x(F(y)\to G(y))\to\exists zH(z)\Leftrightarrow\neg\forall x(F(x)\to G(y))\vee\exists zH(z)$

题 1. 设个体域$D=\{a,b,c\}$，将下列公式的量词消去.

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

解：(1)消去量词，得

$$(F(a)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))$$

(2)先缩小量词辖域，

$$\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$$

$$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$$

再消去量词，得

$$(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

(3) 先消去$\forall$，得

$$\exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$$

再消去$\exists$，得

$$(F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$$
$$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$$

题 2. 设B是不含变元x的公式，谓词公式$(\exists x)(B\rightarrow A(x))$等价于（ ）.

$A.\ B\rightarrow(\exists x)A(x)$ $B.\ B\rightarrow(\forall x)A(x)$

$C.\ (\exists x)A(x)\rightarrow B$ $D.\ B\rightarrow A(x)$

答案：A.

题 3. 谓词公式$\forall x\exists yP(x,y)$的真值为___，其中，$P(x,y)$：$x=y$，定义域：$D=\{1,2\}$.

答案：1.

$$\forall x\exists yP(x,y)$$

先消去$\exists$，得 $\forall x(P(x,1)\vee P(x,2))$

再消去$\forall$，得 $((P(1,1)\vee P(1,2)))\wedge((P(2,1)\vee P(2,2)))$

因此，$(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)$的真值为 1.

2. 谓词逻辑前束范式

具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

的谓词逻辑公式称作前束范式，其中$Q_i(1\leqslant i\leqslant k)$为$\forall$或$\exists$，$B$为不含量词的公式.

例，$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$是前束范式

$\forall x(F(y)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$不是前束范式

（前束范式存在定理）谓词逻辑中的任何公式都存在等值的前束范式.

题 1：下列哪项为前束范式（　　）.

$A.\ \neg\forall xF(x)$　　　　$B.\ \exists xF(x)\to\forall xG(x)$

$C.\ \exists x\exists y(F(x,t)\to G(x,y))$　　$D.\ \exists xF(x)\to H(x,y)$

答案：$C.$

转化方法：

1) 把条件或双条件联结词转化；

2) 利用量词否定公式，把否定深入到命题变元和谓词公式的前面；

3) 换名；

4) 利用量词作用域的扩张和收缩等价式，把量词提到前面.

题 2. 求下列各式的前束范式.

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

(2) $\forall x_1F(x_1,x_2)\to\neg\exists x_2G(x_2)$

解：(1)　$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$

(2)　$\forall x_1F(x_1,x_2)\to\neg\exists x_2G(x_2)$

$\Leftrightarrow\forall x_1F(x_1,x_2)\vee\exists x_2G(x_2)$

$\Leftrightarrow\exists x_1\neg F(x_1,x_2)\vee\exists x_2G(x_2)$

$\Leftrightarrow\exists x_1\neg F(x_1,x_2)\vee\exists x_3G(x_3)$

$\Leftrightarrow\exists x_1\exists x_3(\neg F(x_1,x_2)\vee G(x_3))$

3. 谓词逻辑的推理理论

在谓词逻辑中，从前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$出发推出结论B的推理的形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$$

若上式为永真式，则推理正确，否则称推理不正确.

①命题逻辑推理定律的代换实例.例如：

$$\forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$$

$$\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$$

②由基本等值式生成的推理实例.例如：

由双重否定律可生成

$$\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$$

$$\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$$

由量词否定等值式可以生成

$$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$$

$$\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$$

③一些常用的重要推理定律.

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$

$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$

④4 条消去量词和引入量词的规则.

全称量词消去规则($\forall -$)：$\forall xG(x) \Rightarrow G(y)$，$y$不在$G(x)$中约束出现或$\forall xG(x) \Rightarrow G(c)$，$c$为任意个体常量.

存在量词消去规则($\exists -$)：$\exists xG(x) \Rightarrow G(c)$，$c$为使得$G(c)$为真的特定的个体常量.

全称量词引入规则($\forall +$)：$G(c) \Rightarrow \forall xG(x)$，$G(c)$中无变元$x$.

题 1. 构造下面推理的证明.

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists x(F(x)\wedge H(x))$

结论：$\exists x(G(x)\wedge H(x))$

证明：

①	$\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提引入
②	$F(a)\wedge H(a)$	①$\exists-$
③	$F(a)$	②化简律
④	$H(a)$	②化简律
⑤	$\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
⑥	$F(a)\to G(a)$	⑤$\forall-$
⑦	$G(a)$	③⑥假言推理
⑧	$G(a)\wedge H(a)$	④⑦合取
⑨	$\exists x(G(x)\wedge H(x))$	⑧$\exists+$

得证$\exists x(G(x)\wedge H(x))$是有效结论.

题 2. 构造下面推理证明：

前提：$\forall x(F(x) \vee G(x))$

结论：$\neg \forall xF(x) \to \exists xG(x)$

证明：

①	$\neg \forall xF(x)$	附加前提引入
②	$\exists x \neg F(x)$	置换
③	$\neg F(a)$	②$\exists -$
④	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	前提引入
⑤	$F(a) \vee G(a)$	④$\forall -$
⑥	$G(a)$	③⑤析取三段论
⑦	$\exists xG(x)$	⑥$\exists +$

得证 $\neg \forall xF(x) \to \exists xG(x)$ 是有效结论.

题 3. 证明下列各式.（简明注明使用等值式名称或推理定理名称）

所有北极熊都是白色的，没有棕熊是白色的，所以北极熊不是棕熊.

解：命题符号化

$F(x)$：x 是北极熊.　$G(x)$：x 是白色的.　　$H(x)$：x 是棕熊.

前提：$\forall x(F(x)\to G(x)),\ \neg\exists x(H(x)\wedge G(x))$

结论：$\forall x(F(x)\to\neg H(x))$

证明：用归谬法

①	$\neg\forall x(F(x)\to\neg H(x))$	结论的否定引入
②	$\exists x(F(x)\wedge H(x))$	①置换
③	$F(a)\wedge H(a)$	②$\exists-$
④	$F(a)$	③化简律
⑤	$H(a)$	③化简律
⑥	$\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
⑦	$F(a)\to G(a)$	⑥$\forall-$
⑧	$G(a)$	④⑦假言推理
⑨	$H(a)\wedge G(a)$	⑤⑧合取
⑩	$\exists x(H(x)\wedge G(x))$	⑨$\exists+$

由于最后一步 $\exists x(H(x)\wedge G(x))$ 与前提中 $\neg\exists x(H(x)\wedge G(x))$ 矛盾，所以推理正确.

课时五　练习题

1. 下列四个公式正确的有（　　）.

   $A.\ \forall x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

   $B.\ \forall x(A(x)\vee B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

   $C.\ \exists x(A(x)\vee B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

   $D.\ \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\Rightarrow\exists x(A(x)\wedge B(x))$

2. 在个体域 $D=\{1,2\}$ 中，若 $f(1)=2$，$f(2)=1$，谓词 P 有 $P(1,1)=T$，$P(1,2)=F$，$P(2,1)=T$，$P(2,2)=F$，求 $(\forall x)(\exists y)(P(x,y)\to P(y,f(x)))$ 的真值.

3. 下列等价关系正确的是（B）.

   $A.\ \forall x(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

   $B.\ \exists x(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$

   $C.\ \forall x(P(x)\to Q)\Leftrightarrow\forall xP(x)\to Q$?

   $D.\ \exists x(P(x)\to Q)\Leftrightarrow\exists xP(x)\to Q$?

4. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$，消去公式中的量词.

   ①$\exists xF(x)\to\forall yG(y)$

   ②$\forall x\forall y(F(x)\to G(y))$

   ① $\exists xF(x)\to\forall yG(y)$

   $(F(a)\to G(a))\wedge F(a)\to G(b)$

   $(F(a)\to G(c))\vee(\ldots)$

   $\wedge F(a)\to G(c)$

5. 下列谓词公式中是前束范式的是（C）.

   $A.(\forall x)F(x)\wedge\neg(\exists x)G(x)$　　　$B.(\forall x)F(x)\vee(\forall y)G(y)$

   $C.(\forall x)(\exists y)(P(x)\to Q(x,y))$　　　$D.(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))$

6. $(\exists x)(P(a,x)\to(\forall y)Q(x,b,y))$ 的前束范式为<u>A</u>.

   $\forall x\neg P(x)\vee\exists xQ(x,y)$

   $A.\ (\exists x)(\forall y)(\neg P(a,x)\vee Q(x,b,y))$

   $\forall x\neg P(x)\vee\exists xQ(x,y)$

   $B.\ \neg(\forall x)(\exists y)(P(a,x)\wedge\neg Q(x,b,y))$

   $C.\ (\exists x)(\forall y)(\neg P(a,x)\wedge Q(x,b,y))$

   $D.\ (\exists x)(\neg P(a,x)\vee(\forall y)Q(x,b,y))$　$\neg\exists xP(x)\vee\exists xQ(x,y)$

7. 求合式公式 $\exists xP(x)\to\exists xQ(x,y)$ 的前束范式__________.

   $\forall x\exists z$

8. 求谓词公式的前束范式.

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

~~$\neg\forall x F x$~~　$\neg\forall x(\neg F(x)\vee G(x))$

$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

9. 设个体域为{-1, 1}，并对$P(x,y)$设定为$P(-1,-1)=T$，$P(-1,1)=F$，

$P(1,-1)=T$，$P(1,1)=F$，其真值为T的公式为__A__.

A. $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$　　B. $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$

C. $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$　　D. $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

10. 证明题

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$；$\exists x(F(x)\wedge H(x))$

结论：$\exists x(G(x)\wedge H(x))$

$F(a)\wedge H(a)$

$F(a)$, $H(a)$

$F(a)\rightarrow G(a)$

$G(a)$

11. 在自然推理系统F中构造下面推理再证明.

前提：$\exists xF(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(y))$，$\exists xR(x)\rightarrow\exists yG(y)$

结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x))\rightarrow\exists xH(x)$

12. 先将下列推理符号化，再利用推理规则证明推理的正确性.

所有的大一学生都要学习英语；并非所有的大一学生都要学习离散数学；故有些学习英语的不学习离散数学.

假设谓词如下：$P(x)$：x是大一学生；$Q(x)$：x要学习英语；

$R(x)$：x要学习离散数学.

$P(x)\rightarrow Q$

$\forall(x)(P(x)\rightarrow Q(x))$;

$\neg\forall(x)(P(x)\rightarrow R(x))$;

结: $\exists(x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$;

课时六　集合代数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 集合的基本概念	★★	2~6	选择、填空
2. 集合的运算	★★★	4~8	选择、填空
3. 有穷集的计数	★★★	0~12	解答
4. 集合恒等式	★★★	0~10	证明

1. 集合的基本概念

1) 把一些事物汇集到一起组成一个整体就称作集合，而这些事物就是这个集合的元素或成员. 元素和集合之间的关系是隶属关系，即属于或不属于，属于记作 $\in$，不属于记作 $\notin$.

例：$a\in\{a,\{b,c\}\}$，$d\notin\{a,\{b,c\}\}$

2) 设 A,B 为集合，如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的子集，记作 $B\subseteq A$，如果 B 不被 A 包含，记作 $B\nsubseteq A$.

3) 设 A,B 为集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

4) 设 A,B 为集合，如果 $B\subseteq A$ 且 $B\neq A$，则称 B 是 A 的真子集，记作 $B\subset A$.

5) 不含任何元素的集合称作空集，记作 $\varnothing$. 空集是一切集合的子集.

6) 含有 n 个元素的集合简称为 n 元集，它的含有 $m(m\leqslant n)$ 个元素的子集称作它的 m 元子集.

题 1. $A=\{1,2,3\}$，将 A 的子集分类.

0 元子集，也就是空集：$\varnothing$；　　1 元子集：$\{1\},\{2\},\{3\}$；

2 元子集：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$；　　3 元子集：$\{1,2,3\}$；

7)　设 A 为集合，把 A 的全体子集构成的集合称作 A 的幂集，记作 $P(A)$.

$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

8)　若 A 是 n 元集，则 $P(A)$ 有 2^n 个元素.

9)　在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作 E.

题 2. 设 $S=\{\varnothing,\{1\},\{1,2\}\}$，则下列正确的是（　　）.

$A.\ \{\{1,2\}\}\subset S$　　$B.\ \{\{1,2\}\}\in S$　　$C.\ 1\subset S$　　$D.\ \{1\}\subset S$

答案：A.

题 3. 已知集合 $A=\{\varnothing,1,2\}$，则 A 的幂集合 $P(A)=$__________.

0 元子集：$\varnothing$

1 元子集：$\{\varnothing\},\{1\},\{2\}$

2 元子集：$\{\varnothing,1\},\{\varnothing,2\},\{1,2\}$

3 元子集：$\{\varnothing,1,2\}$

答案：$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{1\},\{2\},\{\varnothing,1\},\{\varnothing,2\},\{1,2\},\{\varnothing,1,2\}\}$.

2. 集合的运算

1)　并运算：$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

2)　交运算：$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

3)　差运算：$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

4)　对称差：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

5)　A 的绝对补集 $\sim A$ 定义如下：

$$\sim A=E-A=\{x|x\in E\wedge x\notin A\}$$

题 1：设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，则差集 $A-B=$ __1,2__，而对称差

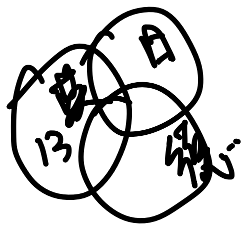
$A\oplus B=$ __{1,2,4,5}__

答案：$\{1,2\}$, $\{1,2,4,5\}$.

题 2. 设全集 $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 的子集为 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，

$A\oplus B=$ __E__，$\sim A\cap\sim B=$ __φ__.

交



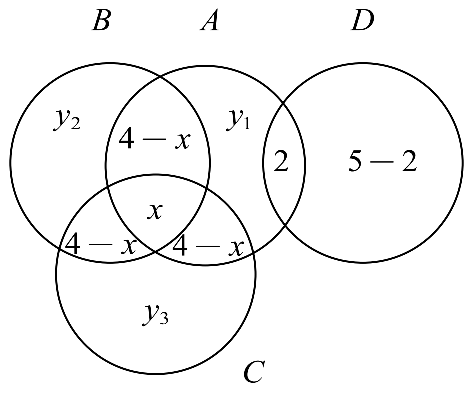
答案：$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $\varnothing$.

3. 有穷集的计数

题 1. 对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查. 其统计结果如下：会英、日、德和法语的人分别是 13, 5, 10 和 9 人，其中同时会英语和日语的有 2 人，会英、德、和法语中任两种语言的都是 4 人. 已知会日语的人既不懂法语也不懂德语，分别求只会一种语言（英、德、法、日）的人数和会 3 种语言的人数.

解：令 A,B,C,D 分别表示会英、法、德、日语的人的集合，根据题意画出文氏图如下图所示. 设同时会 3 种语言的有 x 人，只会英、法或德语一种语言的分别为 y_1,y_2 和 y_3 人. 将 x 和 y_1,y_2,y_3 填入图中相应的区域，然后依次填入其他区域的人数. 根据已知条件列出方程组

$$\begin{cases} y_1+2(4-x)+x+2=13 \\ y_2+2(4-x)+x=9 \\ y_3+2(4-x)+x=10 \\ y_1+y_2+y_3+3(4-x)+x+5=24 \end{cases}$$



解，得 $x=1, y_1=4, y_2=2, y_3=3$.

因此，只会英语、德语、法语、日语的人数为 4, 3, 2, 3，会 3 种语言的人数为 1.

包含排斥原理：

$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$

题 2. 请用集合计数的包含排斥原理，计算1－1000之间既不能被5和6，也不能被8整除的数的个数.

解：设$S=\{x|x\in Z\wedge 1\leqslant x\leqslant 1000\}$

$A=\{x|x\in S\wedge x$ 可被5整除 $\}$ 200

$B=\{x|x\in S\wedge x$ 可被6整除 $\}$ 166

$C=\{x|x\in S\wedge x$ 可被8整除 $\}$ 125

用$|T|$表示有穷集T的元素数，$\lfloor x\rfloor$表示小于等于x的最大整数，则有

$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120\rfloor=8$

$|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$　　$|A\cap B|=\lfloor 1000/30\rfloor=33$

$|B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166$　　$|A\cap C|=\lfloor 1000/40\rfloor=25$

$|C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$　　$|B\cap C|=\lfloor 1000/24\rfloor=41$

$$\begin{aligned}\left|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right|&=|S|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C|\\&=1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8\\&=600\end{aligned}$$

4. 集合恒等式

下面的恒等式给出了集合运算的主要算律，其中A,B,C代表任意的集合.

幂等律	$A\cup A=A$
	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交换律	$A\cup B=B\cup A$
	$A\cap B=B\cap A$

分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$
	$A\cap E=A$
零　律	$A\cup E=E$
	$A\cap\varnothing=\varnothing$
排中律	$A\cup\sim A=E$
矛盾律	$A\cap\sim A=\varnothing$
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$
	$A\cap(A\cup B)=A$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$
	$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
	$\sim\varnothing=E$
	$\sim E=\varnothing$

除了以上算律以外，还有一些关于集合运算性质的重要结果. 例如：

$A-B=A\cap\sim B$

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$A\oplus B=B\oplus A$

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

$A\oplus\varnothing=A$

$A\oplus A=\varnothing$

$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

$A\oplus\sim A=E$

题 1. 证明 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证：$A-(B\cup C)$

$=A\cap\sim(B\cup C)$

$=A\cap(\sim B\cap\sim C)$

$=A\cap\sim B\cap\sim C$

$=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$

$=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cup C)$

$=A$

课时六　练习题

1. 下面是真命题的是（ C ）.

   A. $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$　　B. $\{\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$　　C. $\varnothing\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$　　D. $a\in\{\{a\}\}$

2. 若集合 A 的元素个数 $|A|=8$，则其幂集的元素个数 $|P(A)|=$ 256 .

3. 设集合 $A=\{\varnothing,\{1\}\}$，则 $P(A)=$ $\{\varnothing,\{\{1\}\},\{\varnothing\},\{\varnothing,\{1\}\}\}$

4. 设 A,B 是集合，若 $A-B=\varnothing$，则（ D ）.

   A. $B=\varnothing$　　B. $A=\varnothing$　　C. $A\cap B=\varnothing$　　D. $A\cap B=A$

5. 设集合 $M=\{x|1\leqslant x\leqslant 12, x$ 被 2 整除，$x\in Z\}$，$N=\{x|1\leqslant x\leqslant 12, x$ 被 3 整除，$x\in Z\}$，则 $M\cap N=$ $\{6,12\}$，$M\cup N=$ $\{2,3,4,6,8,9,10,12\}$

6. $A=\{2,5,8\}, B=\{1,2,8,9\}, C=\{1,5,6,8\}$，求 $C-(A\oplus B)=$ $\{6,8\}$.

7. 计算机 1 班的 32 名学生中，有 15 人在第一次考试中得 A，11 人在第 2 次考试中得 A，已知有 8 人两次考试均未得 A，则两次考试都得 A 的学生人数为 2 人.

8. 某班有 50 个学生，会 C 语言的 40 人，会 $java$ 语言的 35 人，会 $c++$ 语言的 10 人，以上三门都会的 5 人，都不会的没有，请问仅会两门的有几人？（要求写出求解过程）

9. 某大学计算机专业 100 名学生中，C 语言课有 32 人优秀，数据结构课有 20 人优秀，离散数学课有 45 人优秀. 并且 C 语言和数据结构两门课都优秀的有 15 人；C 语言和离散数学两门课都优秀的有 7 人；数据结构和离散数学两门课都优秀的有 10 人. 此外，还有 30 人一门优秀都没得到. 如果获得 3 门优秀者可得奖学金 100 元，获得 2 门优秀者可得奖学金 60 元，仅获得一门优秀者可得奖学金 20 元，问为该专业学生发奖学金需多少元？ 2480

10. 设 A,B,C 是三集合，已知 $A\cup B=A\cup C$，则一定有 $B=C$.（ × ）

11. 集合的 $\cap,\cup$ 运算满足结合律，吸收律.（ √ ）

12. 证明 $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$.

13. 设 A,B,C 是任意集合，证明等式 $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

课时七　二元关系（1）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 有序对与笛卡尔积	★★★	0~3	填空、解答
2. 二元关系	★★★★★	6~8	选择、填空
3. 关系的运算	★★★★	0~4	填空、解答

1. 有序对与笛卡尔积

由两个元素 x 和 y 按照一定顺序排列而成的二元组称作一个有序对或序偶，记作 $\langle x,y\rangle$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素.

设 A,B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的笛卡尔积，记作 $A\times B$，符号化表示为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

题 1. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，求 $A\times B$，$B\times A$.

$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$

$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

若 $|A|=m,|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$.

笛卡尔积运算具有以下性质：

1) 对任意集合 A，根据定义有 $A\times\varnothing=\varnothing,\varnothing\times A=\varnothing$.

2) 一般地说，笛卡尔积运算不满足交换律，即

$$A\times B\neq B\times A\ （当 A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B 时）$$

3) 笛卡尔积运算不满足结合律，即

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\ （当 A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing 时）$$

4) 笛卡尔积运算对并和交运算满足分配律，即

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

2. 二元关系

1) 如果一个集合满足以下条件之一：

a) 集合非空，且它的元素都是有序对；

b) 集合是空集.

则称该集合为一个二元关系，记作 R，二元关系也可简称为关系. 对于二元关系 R，如果 $\langle x,y \rangle \in R$，则记作 xRy.

2) 设 A,B 为集合，$A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系，特别当 $A = B$ 时称作 A 上的二元关系.

3) 若 $|A| = n$，那么 $|A \times A| = n^2$，$A \times A$ 的子集就有 2^{n^2} 个，每一个子集代表一个 A 上的二元关系，因此 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

题 1. 设集合 $X = \{1,2,3\}$，设关系 R 为 X 上的小于关系，则 $R =$ ________.

答案：$\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$.

题 2. 设 A 为集合，且 $|A| = 3$，则 A 上最多可定义 2^{3^2} 个不同的二元关系.

答案：$2^{3^2} = 2^9 = 512$.

$= 2^9$

$= 512$

A 上的特殊关系：空关系，全域关系 E_A，恒等关系 I_A.

空关系：空集 $\varnothing$

且

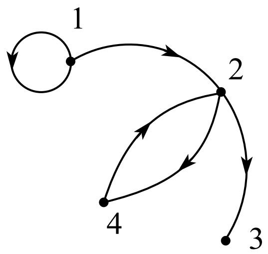
全域关系：$E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系：$I_A = \{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

给出一个关系的方法有3种：集合表达式、关系矩阵和关系图.

题 1. $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，则 R 的关系矩阵是________.

答案：$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$.



设 $A=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$，$R$ 是 A 上的关系，R 的关系图记作 G_R，G_R 有 n 个顶点 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，若 $\langle x_i,x_j\rangle\in R$，在 G_R 中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

题 5. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的二元关系 R 的关系矩阵 $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，那么 $R=$________.

答案：$\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$.

$\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,$
$\langle 3,1\rangle\}$

3. 关系的运算

domR.

设 R 是二元关系

1）　R 中所有有序对的第一元素构成的集合称作 R 的定义域，记作 $domR$，形式化表示为

$$domR = \{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in R)\}$$

ranR

2）　R 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 R 的值域，记作 $ranR$，形式化表示为

$$ranR = \{y \mid \exists x(\langle x,y\rangle \in R)\}$$

fldR

3）　R 的定义域和值域的并集称作 R 的域，记作 $fldR$，形式化表示为

$$fldR = domR \cup ranR$$

题 1. $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$，求 $domR,ranR,fldR$.

$$domR=\{1,2,4\}$$

$$ranR=\{2,3,4\}$$

$$fldR=\{1,2,3,4\}$$

$domR=\{1,2,4\}$
$ranR=\{2,3,4\}$
$fldR=\{1,2,3,4\}$

4）　设 R 是二元关系，R 的逆关系，简称为 R 的逆，记作 R^{-1}，其中

$$R^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$$

5）　设 F,G 为二元关系，G 对 F 的右复合记作 $F\circ G$，其中

$$F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists t\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G\}$$

$F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists t\langle x,t\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in F\}$

题 2. 设 $F=\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$，$G=\{\langle 2,3\rangle\}$，求 $F^{-1},F\circ G,G\circ F$.

$$F^{-1}=\{\langle 3,3\rangle,\langle 2,6\rangle\}$$

$F\circ G=\{\langle 2,3\rangle\}$

$$F\circ G=\{\langle 6,3\rangle\}$$

$$G\circ F=\{\langle 2,3\rangle\}$$

$G\circ F=\{\langle 6,2\rangle\}$.

课时七　练习题

1. 设有限集 A,B，$|A|=m$，$|B|=n$，则笛卡尔积 $A\times B$ 的子集个数有 $2^{m\cdot n}$.

2. 设 $A=\{a,b\}$，求 $P(A)\times A$.

$P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$P(A)\times A)=<\emptyset,a>,$

3. 设 $A=\{1,2,3\}$，则 A 上有（ D ）个二元关系.

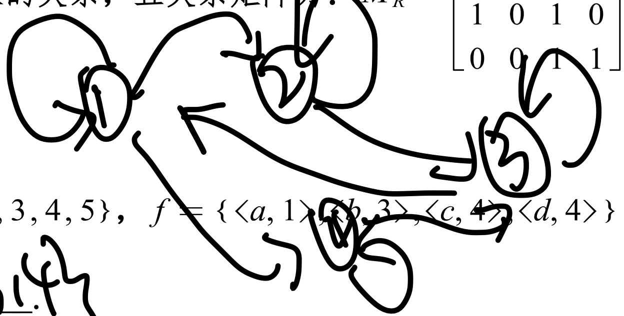
$A.\ 23$　　　$B.\ 32$　　　$C.\ 2^{2^3}$　　　$D.\ 2^{3^2}$

4. 设 $A=\{2,4,6,12\}$，$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge god(x,y)=2\wedge lcm(x,y)=12\}$. 其中 $god(x,y)$，$lcm(x,y)$ 分别表示 x 和 y 的最大公约数和最小公倍数，则 R 的关系矩阵 $M_R=$ ________.

$\{<2,12>$ $<4,6>$ $<6,4>$ $<12,2>$

(1,4) (2,3)

5. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 为 A 上的关系，且关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，则 R 的关系图为：________.



6. 设 $X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3,4,5\}$，$f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,4\rangle,\langle d,4\rangle\}$，则 $domf=$ X，$ranf=$ $\{1,3,4\}$.

7. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，从 A 到 B 的关系 $R=\{\langle x,y\rangle\mid x=2y\}$，则 $R^{-1}=$ ________

$R^{-1}=\{<1,2>,<2,4>,<3,6>$ $\{<2,1>,<4,2>,<6,3>\}$

8. $R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$R_2=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，求：

(1) R_2-R_1　<2,2>, <3,4>

(2) R_2^{-1}　<2,2>, <3,2>, <4,3>

(3) $R_2\circ R_1$

<1,2> <1,3>, <1,4> <2,4>

课时八　二元关系（2）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 关系的性质	★★★★★	4~6	判断，选择，填空，解答
2. 关系的闭包	★★★★	0~6	填空，解答
3. 等价关系与划分	必考	6~12	证明
4. 偏序关系	必考	8~12	解答

1. 关系的性质

R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\to \langle x,x\rangle\in R)$

R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\to \langle x,x\rangle\notin R)$　$(x\in A\to <x,x>\notin R)$

R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\to\langle y,x\rangle\in R)$

R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\to x=y)$　且

R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\to\langle x,z\rangle\in R)$

表示	性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$ 且 $i\neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，则一定是一对方向相反的边（无单边）	如果两个顶点之间有边，则一定是一条有向边（无双向边）	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

题 1. 给定 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的关系 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$ 满足的性质是__________.

答案：反自反性、反对称性、传递性.

1, 2, 3, <1, 2>, <1, 3>, <2, 3>

题 2. 设集合 A 为整数集，则 A 上的小于关系具有性质（ B ）.

A. 自反的，对称的，传递的　　B. 反自反的，反对称的，传递的

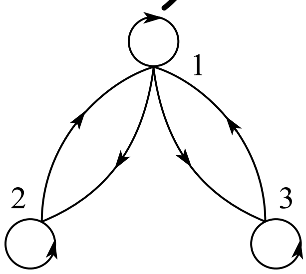
C. 自反的，反对称的，传递的　　D. 反自反的，对称的，传递的

答案：B.

题 3. 设 $S=\{1,2,3\}$，S 上关系 R 的关系图如下图，则 R 具有（ D ）.

A. 自反性、传递性　　B. 反自反性、对称性

C. 反对称性、传递性　　D. 自反性、对称性



答案：D.

题 4. 集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 R 的关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 R 具有的性质是（　）.

A. 自反的　　B. 反自反的，反对称的

C. 反自反的，对称的，传递的　　D. 自反的，对称的，传递的

答案：A.

2. 关系的闭包

设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R'，使 R' 满足以下条件：

1) R' 是自反的（对称的或传递的）；

2) $R \subseteq R'$；

3) 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$；

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$，对称闭包记作 $s(R)$，传递闭包记作 $t(R)$.

题 1. 给定 $A=\{1,2,3,4\}$ 和 A 上的关系 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，求：$R$ 的自反闭包、对称闭包及传递闭包.

解：$r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

$s(R)=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

$t(R)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

3. 等价关系与划分

1) 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系.

2) 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R=\{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记为 $[x]$ 或 $\bar{x}$.

题 1. 设 $A=\{1,2,...,8\}$，如下定义 A 上的关系 R：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y(mod3)\}$$

其中 $x\equiv y(mod3)$ 称作 x 与 y 模3相等，即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等，求等价类.

解：等价类 $[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

<1, 4>, <1, 7>

<2, 5>, <2, 8>

<3, 6>

3) 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记作 A/R，即

$$A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$$

$$\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$$

4) 设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π（$\pi\subseteq P(A)$，是 A 的子集构成的集合）满足下列条件：

a) $\varnothing\notin\pi$

b) $\forall x\forall y\{x,y\in\pi\wedge x\neq y\to x\cap y=\varnothing\}$

c) $\cup\pi=A$

则称 π 是 A 的一个划分.

题 2. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，给定 $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$，如下：

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$$

$$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

$$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$$

$$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$$

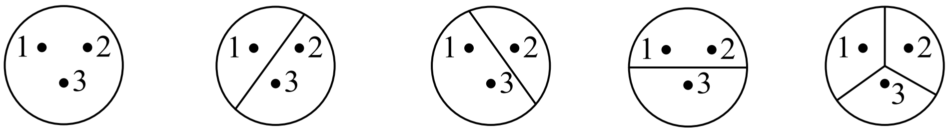
$$\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$$

$$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分. 因为 π_3 中的子集 $\{a\}$ 和 $\{a,b,c,a\}$ 有交，$\cup\pi_4\neq A$，π_5 中含有空集，而 π_6 根本不是 $P(A)$ 的子集.

题 3. 求出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系.

解：如图所示，先给出 A 的所有划分.



这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应：π_1 对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A，π_3 和 π_4 分别对应于等价关系 R_2，R_3 和 R_4，其中

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$

$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

注：有多少种划分，就有多少种等价关系.

题 4. 设 R 是 A 上的自反和传递关系，如下定义 A 上的关系 T，使得 $\forall x,y\in A$

$$\langle x,y\rangle \in T \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R$$

证：T 是 A 上的等价关系.

证：①自反性

$\forall x\in A$, $\because R$ 是自反的

$\therefore \langle x,x\rangle \in R \wedge \langle x,x\rangle \in R$

$\therefore \langle x,x\rangle \in T$，$T$ 自反.

② 对称性

$\forall x,y\in A$，$\langle x,y\rangle \in T$

$\langle x.y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R$

即 $\langle y,x\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R$

$\therefore \langle y,x\rangle \in T$，$T$ 对称.

③$\forall x,y,z\in A$

设 $\langle x,y\rangle \in T$，$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R$，

$\langle y,z\rangle \in T$，$\langle y,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in R$

$\because R$ 传递的

$\therefore \langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,x\rangle \in R$

$\therefore \langle x,z\rangle \in T$，$T$ 是传递的

综上，T 是 A 上的等价关系.

4. 偏序关系

设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的，反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系，记作 $\preccurlyeq$.

集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起称作偏序集，记作 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

在画偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图时，首先适当排列顶点的顺序，使得：$\forall x,y\in A$，若 $x \prec y$，则将 x 画在 y 的下方. 对于 A 中的两个不同元素 x 和 y，如果 x 和 y 有相应关系，就用一条线段连接 x 和 y.

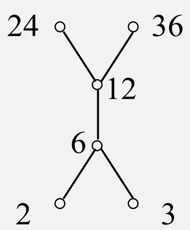
题 1. 设 $A=\{2,3,6,12,24,36\}$，画出偏序集 $\langle A, R_{整除}\rangle$ 的哈斯图.

最大元和最小元

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集，B 是 A 的任何一个子集，若存在元素 $b\in B$，使得

对任意 $x\in B$，都有 $x\preccurlyeq b$，则称 b 为 B 的最大元.

对任意 $x\in B$，都有 $b\preccurlyeq x$，则称 b 为 B 的最小元.



	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
最大元	12	无	无	12
最小元	6	无	无	无

关系的最大与最小.

极大元和极小元

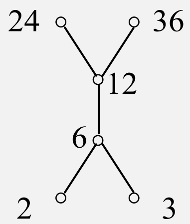
设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是偏序集，$B$是$A$的任何一个子集，若存在元素$b \in B$，使得

$x \preccurlyeq b \Rightarrow x = b$

对任意$x \in B$，满足$\cancel{b \preccurlyeq x \to x = b}$，则称$b$为$B$的极大元.

$b \preccurlyeq x \Rightarrow x = b$

对任意$x \in B$，都有$\cancel{x \preccurlyeq b \to x = b}$，则称$b$为$B$的极小元.



	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
极大元	12	2, 3	24, 36	12
极小元	6	2, 3	24, 36	2, 3

从以上定义可以看出，最小元与极小元是不一样的. 最小元是B中最小的元素，它与B中其他元素都可比；而极小元不一定与B中元素都可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元. 对于有穷集B，极小元一定存在，但最小元不一定存在. 最小元如果存在，一定是唯一的，但极小元可能有多个. 如果B中只有一个极小元，则它一定是B的最小元. 类似地，极大元与最大元也有这种区别.

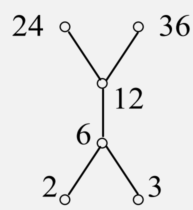
哈斯图中的孤立顶点既是极大元，也是极小元.

上界和上确界

设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$是偏序集，$B$是$A$的任何一个子集，若存在元素$a\in A$，使得

对任意$x\in B$，满足$x\preccurlyeq a$，则称a为B的上界.

若元素$a'\in A$是B的上界，元素$a\in A$是B的任何一个上界，若均有$a'\leqslant a$，则称a'为B的最小上界或上确界.



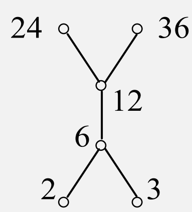
	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
上界	$12,24,36$	$6,12,24,36$	无	$12,24,36$
上确界	12	6	无	12

下界和下确界

设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$是偏序集，$B$是$A$的任何一个子集，若存在元素$a\in A$，使得

对任意$x\in B$，满足$a\preccurlyeq x$，则称a为B的下界.

若元素$a'\in A$是B的下界，元素$a\in A$是B的任何一个下界，若均有$a\leqslant a'$，则称a'为B的最大下界或下确界.



	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
下界	$2,3,6$	无	$2,3,6,12$	无
下确界	6	无	12	无

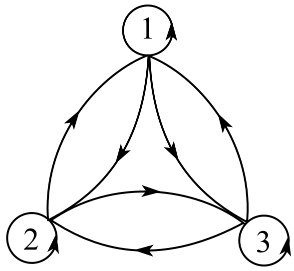
① 子集B的上、下界和上、下确界可在集合A中寻找；

② 子集B的上、下界不一定存在，如果存在可能多个；

③ 子集B的上、下确界不一定存在，如果存在一定唯一.

课时八　练习题

1. 设$S=\{1,2,3\}$，R为S上的关系，其关系图如下所示，则R具有（ A ）的性质.



   A. 自反、对称、传递

   B. 什么性质也没有

   C. 反自反、反对称、传递

   D. 自反、对称、反对称、传递

2. 设集合$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$上的关系$R=\{(x,y)\mid x,y\in A$ 且 $x+y=10\}$，则R的性质是（ B ）.

   $<1,9>$

   A. 自反的　　B. 对称的　　C. 对称的、传递的　　D. 反自反的、传递的

3. 设$A=\{0,1,2,3\}$，A上的二元关系$R=\{\langle x,y\rangle \mid x=y\vee x+y\in A\}$. 列出关系$R$，求$R$的关系图和关系矩阵，并判断$R$的性质.

4. 设$A=\{a,b,c\}$，R是A上二元关系，且给定$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$，则$R$的自反闭包$r(R)=$__________，对称闭包$s(R)=$__________.

5. 设集合$A=\{a,b,c,d\}$，R是集合A上的二元关系，$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$，问：

   1) R具有什么性质？（自反、反自反、对称、反对称、传递关系）

   2) 求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

6. 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，A上的关系$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，问：

   1) R具有什么性质？（自反、反自反、对称、反对称、传递关系）

   2) 求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

7. 设R是集合$A=\{1,2,...,10\}$上模 3 的同余关系，则$[2]_R=$__________.

8. 集合A的基数是3，则A有__________个不同的划分.

9. 集合 $A=\{1,2,3,4\}$，则对 A 的元素进行划分正确的是（ B ）.

A. $\{\varnothing,\{1,2\},\{3,4\}\}$　B. $\{\{1,2,3,4\}\}$　C. $\{\{1\},\{3,4\}\}$　D. $\{\{1,2,3\},\{3,4\}\}$

10. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的等价关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}\cup I_A$，则对应于 R 的 A 的划分是（ D ）.

A. $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$　B. $\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$　C. $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$　D. $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$

11. 假定 A 是所有正整数序对构成的集合，R 是 A 上的关系，定义为：

$$\langle a,b\rangle R\langle d,c\rangle \Leftrightarrow a+d=b+c$$

证明 R 是 A 上等价关系.

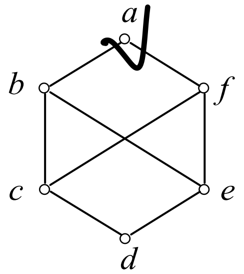
12. 以下哈斯图给出的偏序集中，子集 $\{b,e,f\}$ 的所有上界是（ B ）.

A. b,c

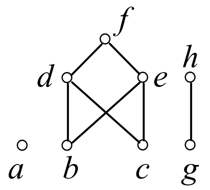
B. a

C. b

D. a,b,c



13. 已知偏序集 $\langle A,R\rangle$ 的哈斯图如下图所示，则关系 R 的的表达式为__________.



14. 设集合 $A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，R 为 A 上的整除关系，则 R 为偏序关系.

1) 求该关系的哈斯图；

6　无　6　2,3　6,12,24,

2) 令 $B=\{2,3,6\}$，求 B 的最大元、最小元、极大元、极小元、上界和下界.

1,

15. 设集合 $P=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$，D 表示整除关系，则 $\langle P,D\rangle$ 构成偏序集，回答问题.

1) 画出该偏序集的哈斯图；

30,　1　30　1

2) 写出子集 $\{1,5,10,15\}$ 的上界、下界、最小上界、最大下界；

30　1,　30　6.

3) 写出集合 $\{1,2,3,6,30\}$ 的最大元、最小元、极大元和极小元.

课时九 函数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 函数的定义与性质	★★★	0~4	选择、填空
2. 函数的复合与反函数	★★★	0~6	选择、判断

1. 函数的定义与性质

1) 设 F 为二元关系，若 $\forall x \in domF$ 都存在唯一的 $y \in ranF$ 使 xFy 成立，则称 F 为函数. 对于函数 F，则记作 $y = F(x)$，并称 y 为 F 在 x 的值.

题 1. 设

$$F_1 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_2\rangle\}$$

$$F_2 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle\}$$

判断它们是否为函数.

解：F_1 是函数，F_2 不是函数，因为对应 x_1 存在 y_1 和 y_2 满足 $x_1 F_2 y_1$ 和 $x_1 F_2 y_2$，与函数定义矛盾.

2) 设 A,B 为集合，如果 f 为函数，且 $domf = A$，$ranf \subseteq B$，则称作从 A 到 B 的函数，记作 f：$A \to B$.

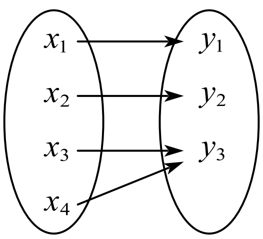
3) 设 f：$A \to B$.

a) 若 $ranf = B$，则称 f：$A \to B$ 是满射的.

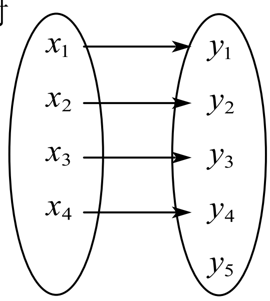
b) 若 $\forall y \in ranf$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$，则称 f：$A \to B$ 是单射的.

c) 若 f：$A \to B$ 既是满射又是单射的，则称 f：$A \to B$ 是双射的（或一一映像）.

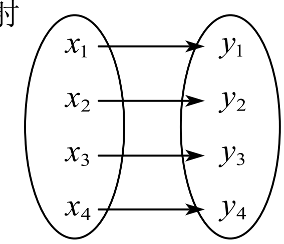
满射



单射



双射



4） 若 f 是从有限集 A 到有限集 B 的函数，则有

f 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$；

f 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$；

f 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$；

题 2. 设 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{a,b\}$，求 B^A.

解：$B^A = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$，其中：

$$f_0 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$

$$f_1 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$

$$f_3 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$

$$f_5 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$

$$f_7 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

注：若 $|A| = m$，$|B| = n$，且 $m,n > 0$，则 $|B^A| = n^m$.

因此，$|A| = 3$，$|B| = 2$，而 $|B^A| = 2^3 = 8$.

题 3. 函数是 $f: R \to [-1,1]$，R 为实数集合，$[-1,1]$ 为 -1 到 1 上的实数闭区间，$f(x) = \sin(x)$ 是（ B ）函数.

~~A.~~ 单射但是非满射　　B. 满射非单射

C. 双射　　D. 既不是单射，也不是满射

答案：B.

2. 函数的复合与反函数

设 F,G 是函数，则 $F\circ G$ 也是函数，且满足

1) $dom(F\circ G)=\{x|x\in domF\wedge F(x)\in domG\}$

2) $\forall x\in dom(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x)=G(F(x))$

题 1. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，函数 f：$A\to B$，g：$B\to A$ 定义如下：

$f=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,d\rangle,\langle 4,c\rangle,\langle 5,b\rangle\}$；

$g=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,5\rangle,\langle d,2\rangle\}$.

则求 $f\circ g$, $g\circ f$ 的值.

$f\circ g=\{\langle a,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,a\rangle\}$

答案：$f\circ g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,3\rangle\}$；

$g\circ f=\{\langle a,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,a\rangle\}$.

$g\circ f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,3\rangle\}$

推论 1　设 F,G,H 为函数，则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数，且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

推论 2　设 f：$A\to B$，g：$B\to C$，则 $f\circ g$：$A\to C$，且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

题 2. 设函数 $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+1$，则 $f\circ g=$__________.

$f\circ g=2(x^2+1)$

答案：$4x^2+1$

设 f：$A\to B$ 是函数，如果 $f^{-1}=\{\langle y,x\rangle\,|x\in A,y\in B,y=f(x)\}$ 是从 B 到 A 的函数，则称 f^{-1}：$B\to A$ 为函数 f 的反函数.

题3. 函数 $f_1(x)=x^2, x\in R$ 时没有反函数，但当 $x\in R^+$ 时有反函数 $\sqrt{x}$.

函数 $f_2(x)=2x, x\in R$ 时有反函数 $\frac{1}{2}x$.

课时九　练习题

1. 设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，以下哪一个关系是从A到B的一一对应函数（ B ）.

$A.\ f=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$　　$B.\ f=\{\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$

$C.\ f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle,\langle a,3\rangle\}$　　$D.\ f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$

2. 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，下列A上的关系构成A到A的映射的是（ D ）.

$A.\ f_1=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$　　$B.\ f_2=\{\langle 4,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$C.\ f_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$　　$D.\ f_4=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

3. 设$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则A到B的函数个数为（ D ）.

$A.\ 4+5$　　$B.\ 4$　　$C.\ 4\cdot 5$　　$D.\ 5^4$

4. 集合A到B共有64个不同的函数，则B中元素个数不可能是（ C ）.

$A.\ 4$　　$B.\ 8$　　$C.\ 16$　　$D.\ 64$

5. Z是整数集合，定义函数f：$Z\to Z$，$f(x)=x+3$，则函数f是（ ~~B~~ ）. C

A. 满射非单射　　B. 单射非满射

C. 双射　　D. 非单射非满射

6. Z是整数集合，下列函数都是$Z\to Z$的映射，则（ C ）是单射而非满射函数.

$A.\ \varphi(x)=0$　　$B.\ \varphi(x)=x^2$　　$C.\ \varphi(x)=2x$　　$D.\ \varphi(x)=x$

7. 设σ和τ是定义在实数集合R上的函数，$\sigma(x)=x^2+2x+1$，$\tau(x)=\dfrac{x}{2}$，求：$\tau\circ\sigma$和$\sigma\circ\tau$.

$\tau\circ\sigma=\dfrac{x^2+2x+1}{2}$　　$\sigma\circ\tau=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+2\cdot\dfrac{x}{2}+1$

8. 若f,g为函数，则$(f\circ g)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.（ × ）判断

9. 若f为函数，则$(f^{-1})^{-1}=f$.（ √ ）判断

课时十 代数结构

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 二元运算及其性质	★★★	0~6	选择、填空
2. 群的定义	★★★★★	0~10	填空、解答

1. 二元运算及其性质

1） 设S为集合，函数f：$S\times S\to S$称为S上的二元运算，简称为二元运算.

设S为集合，函数f：$S\to S$称为S上的一元运算，简称为一元运算.

验证一个运算是否为集合S上的二元运算主要考虑以下两点：

① S中任何两个元素都可以进行这种运算，且运算的结果是唯一的.

② S中任何两个元素的运算结果都属于S，即S对该运算是封闭的.

2） 设$\circ$为S上的二元运算，如果对于任意的$x,y,z\in S$都有

$$x\circ y=y\circ x$$

则称运算$\circ$在S上是可交换的，或者说运算$\circ$在S上适合交换律.

例如，实数集上的加法和乘法是可交换的，但减法不可交换.

3） 设$\circ$为S上的二元运算，如果对于任意的$x,y,z\in S$都有

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$$

则称运算$\circ$在S上是可结合的，或者说运算$\circ$在S上适合结合律.

4） 设$\circ$为S上的二元运算，如果对于任意的$x\in S$都有

$$x\circ x=x$$

则称该运算$\circ$适合幂等律.

5）设$\circ$和$*$为S上的两个二元运算，如果对于任意的$x,y,z\in S$都有

$$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z) \qquad \text{（左分配律）}$$

$$(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x) \qquad \text{（右分配律）}$$

则称运算$*$对$\circ$是可分配的，或者说$*$对$\circ$适合分配律.

6）$$\langle A,*\rangle\begin{cases}\exists e_l\in A & \forall x\in A & e_l*x=x & A\text{中关于运算}*\text{的左幺元}\\ \exists e_r\in A & \forall x\in A & x*e_r=x & A\text{中关于运算}*\text{的右幺元}\\ \exists e\in A & \forall x\in A & e*x=x*e=x & A\text{中关于运算}*\text{的幺元}\end{cases}$$

设$*$定义在集合A上的一个二元运算，且在A中有关于运算$*$的左幺元e_l和右幺元e_r，则$e_l=e_r=e$，且A中的幺元是唯一的.

7）$$\langle A,*\rangle\begin{cases}\exists \theta_l\in A & \forall x\in A & \theta_l*x=\theta_l & A\text{中关于运算}*\text{的左零元}\\ \exists \theta_r\in A & \forall x\in A & x*\theta_r=\theta_r & A\text{中关于运算}*\text{的右零元}\\ \exists \theta\in A & \forall x\in A & \theta*x=x*\theta=\theta & A\text{中关于运算}*\text{的零元}\end{cases}$$

设$*$定义在集合A上的一个二元运算，且在A中有关于运算$*$的左零元θ_l和右零元θ_r，那么$\theta_l=\theta_r=\theta$，且A中的零元是唯一的.

8）

$\langle A,*\rangle$	对A中一	$\exists b\in A$	$b*a=c$	b为a的左逆元
幺元e	个元素a	$\exists b\in A$	$a*b=c$	b为a的右逆元

如果一个元素b，它既是a的左逆元又是a的右逆元，那么就称b是a的一个逆元.

如果b是a的逆元，那么a也是b的逆元，简称a与b互为逆元.

一个元素x的逆元记为x^{-1}.

题 1. 设 $A=\{a,b,c\}$，A 上的二元运算 $*$，$\circ$，如下表所示，求出关于 $*$，$\circ$ 运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

解：单位元是 a，没有零元，且 $a^{-1}=a$，$b^{-1}=c$，$c^{-1}=b$.

单位元是 a，零元是 b，只有 a 有逆元，$a^{-1}=a$.

2. 群的定义

1) 代数系统：非空集合 S 和 S 上 k 个一元或者二元运算组成的系统.

2) 一个代数系统 $\langle S,*\rangle$，其中 S 是非空集合，$*$ 是 S 上的一个二元运算，如果运算 $*$ 是封闭的，则称代数系统 $\langle S,*\rangle$ 为广群.

3) 一个代数系统 $\langle S,*\rangle$，其中 S 是非空集合，$*$ 是 S 上的一个二元运算，如果

a) 运算 $*$ 是封闭的.

b) 运算 $*$ 是可结合的，即对任意的 $x,y,z\in S$，满足 $(x*y)*z=x*(y*z)$，则称代数系统 $\langle S,*\rangle$ 为半群.

4) 含有幺元的半群称为独异点.

5) 设 $\langle G,*\rangle$ 是一个代数系统，其中 G 是非空集合，$*$ 是 G 上一个二元运算，如果

a) 运算 $*$ 是封闭的.（广群）

b) 运算 $*$ 是可结合的.（半群）

c) 存在幺元 e.（独异点）

题 1：半群、群和独异点的关系是________________.

答案：群$\subseteq$独异点$\subseteq$半群

题 2. 设$V=\langle S,*\rangle$是代数系统，$*$为二元运算，如果$*$是可结合的，$*$的单位元为e，则称V为____________.（半群，独异点，群）

答案：独异点

题 3. 设Q是有理数集，$Q^*=Q-\{0\}$，$\forall a,b\in Q^*$，$a\Delta b=8ab$，证明(Q^*,Δ)为群.

证明：(1) $a\Delta b=8ab$

$\because \forall a,b\in Q^*$，$a\neq 0$，$b\neq 0$

$\therefore 8ab\neq 0$，$a\Delta b\in Q^*$

$\therefore$运算Δ是封闭的

(2) 设$\forall a,b,c\in Q^*$

$(a\Delta b)\Delta c=(8ab)\Delta c=64abc$

$a\Delta(b\Delta c)=a\Delta(8bc)=64abc$

$(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$

$\therefore$运算Δ是可结合的

(3) 该运算Δ的幺元是$\dfrac{1}{8}$

(4) 对于$\forall a\in Q^*$，均存在它的逆元a^{-1}

$\therefore (Q^*,\Delta)$为一个群.

课时十　练习题

1. 下面集合中关于减法运算封闭的是（　　）.

   $A.\ N$　　$B.\ \{2x \mid x \in Z\}$　　$C.\ \{2x+1 \mid x \in Z\}$　　$D.$ $\{x \mid x$是质数$\}$

2. 在自然数集N中定义运算“□”表示求两个数的最小公倍数，则该运算的幺元是（　　）.

   $A.\ 0$　　$B.\ 1$　　$C.\ \infty$　　$D.$ 不存在

3. 设Z是整数集，在Z上定义二元运算$*$为$a*b=a+b+a\cdot b$，其中“$+$”和“$\cdot$”分别是数的加法和乘法，则代数系统$\langle Z, *\rangle$的幺元是_________，零元是___________.

4. 集合$A=\{0,1,2,3,4\}$上的代数运算$\otimes$的运算表如下，求关于运算$\otimes$的幺元、零元和所有可逆元.

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

5. 如果代数系统具有封闭性、可结合性和存在幺元，则此代数系统称之为___________.

6. 下列运算中，哪种运算关于整数集不能构成半群？（　　）

   $A.\ a\circ b=\max\{a,b\}$　　$B.\ a\circ b=b$　　$C.\ a\circ b=2ab$　　$D.\ a\circ b=|a-b|$

7. 若一个代数系统是独异点（含幺半群），则以下选项中一定满足的是（　　）.

   $A.$ 封闭性，且有零元；　　$B.$ 结合律，且有幺元；

   $B.$ 交换性，且有幺元；　　$D.$ 结合律，且每个元素有逆元.

8. 已知$Q^*=Q-\{0\}$，Q是有理数集，$\forall m,n\in Q^*$, $n*m=\frac{1}{7}nm$，证明$(Q^*, *)$是群.

9. 在整数集合 Z 上代数系统 $(Z, *)$，定义：$a * b = a + b - 2ab,\ \forall a, b \in Z$，其中右边是一般的整数加、减乘法运算.判断：

(1) 是否满足交换律、结合律.

(2) 指出零元、幺元.

(3) 该代数系统是否为群？为什么？

课时十一　图的基本概念

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 图	★★★★★	2~6	选择、填空
2. 通路与回路	★★	0~2	选择
3. 图的连通性	★★★★	0~4	选择、填空
4. 图的矩阵表示	必考	10~16	选择、填空、解答

1. 图

1） 一个无向图G是一个有序的二元组$\langle V,E\rangle$，其中

a） V是一个非空有穷集，称作顶点集，其元素称作顶点或结点.

b） 是无序积$V\&V$的有穷多重子集，称作边集，其元素称作无向边，简称为边.

2） 一个有向图D是一个有序的二元组$\langle V,E\rangle$，其中

a） V是一个非空有穷集，称作顶点集，其元素称作顶点或结点.

b） E是笛卡尔积$V\times V$的有穷多重子集，称作边集，其元素称作有向边，简称为边.

3） 顶点数称作图的阶，n个顶点的图称作n阶图.

4） 一条边也没有的图称作零图，n阶零图记作N_n，1阶零图N_1称作平凡图，平凡图只有一个顶点，没有边.

5） 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图，$e_k=(v_i,v_j)\in E$，称v_i,v_j为e_k的端点，e_k与$v_i(v_j)$关联.若$v_i\neq v_j$，则称e_k与$v_i(v_j)$的关联次数为1；若$v_i=v_j$，则称e_k与v_i的关联次数为2，并称e_k为环.如果顶点v_l不与边e_k关联，则称e_k与v_l的关联次数为0.

若两个顶点v_i与v_j之间有一条边连接，则称这两个顶点相邻.若两条边至少有一个公共端点，则称这两条边相邻.

6） 设$G=\langle V,E\rangle$为有向图，$e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E$，称$v_i,v_j$为$e_k$的端点，$v_i$为$e_k$的始点，$v_j$为$e_k$的终点，并称$e_k$与$v_i=v_j$关联．若$v_i=v_j$，则称$e_k$为$D$中的环．

若两个顶点之间有一条有向边，则称这两个顶点相邻．若两条边中一条边的终点是另一条边的始点，则称这两条边相邻．

图（无向的或有向的）中没有边关联的顶点称作孤立点．

6） 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图，$\forall v\in V$，称v作为边的端点的次数为v的度数，简称为度，记作$d(v)$．

设$G=\langle V,E\rangle$为有向图，$\forall v\in V$，称v作为边的始点的次数为v的出度，记作$d^+(v)$．称v作为边的终点的次数为v的入度，记作$d^-(v)$．称$d^+(v)+d^-(v)$为v的度数，记作$d(v)$．

注意：在无向图中，顶点v上的环以v作2次端点．在有向图中，顶点v上的环以v作一次始点和一次终点，共作2次端点．

8） 握手定理：

a） 在任何无向图中，所有顶点的度数之和等于边数的2倍．

b） 在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的2倍；所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数．

推论：任何图中，奇度顶点的个数是偶数．

题 1. 已知n阶无向图G中有m条边，各顶点的度数均为3，又已知$2n-3=m$，则$m=$ 9 ．

答案：9．

$3n=2m$ $\frac{2m}{3}$

$2n-3=m$

$\frac{4}{3}m-3=m$

$\frac{1}{3}m=3$

$m=9$

> 9) 设$G=\langle V,E\rangle$为一个n阶无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，称$d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n)$为$G$的度数列. 对于给定的非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，若存在以$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$为顶点集的$n$阶无向图$G$，使得$d(v_i)=d_i$，则称$d$是可图化的. 特别地，若所得到的图是简单图，则称$d$是可简单图化的. 对有向图还可以类似定义出度列和入度列.

题 2. 一个3阶有向图的度序列是2,2,4，入度序列是2,0,2，出度序列是________.

答案：$(2,2,4)-(2,0,2)=(0,2,2)$　　(0 2,2)

> 10) 非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$是可图化的当且仅当$\sum_{i=1}^{n}d_i$为偶数.
>
> 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G)\leq n-1$.

10

题 3. 一个无向图有五个结点，其中4个的度数是1,2,3,4，则第5个结点的度数不可能是__D__.

$A.$ 0　　$B.$ 2　　$C.$ 4　　$D.$ 5　　3

答案：D.

3　3

题 4. 下列四组数据中，能作为某个4阶无向简单图的度序列的为（　）.

$A.$ 1,2,3,4　　$B.$ 2,2,2,3　　$C.$ 1,1,2,3　　$D.$ 1,1,1,3

答案：D.

> 11) 设G为n阶无向简单图，若G中每个顶点均与其余的$n-1$个顶点相邻，则称G为n阶无向完全图，记作$K_n(n\geq 1)$.　　N_n
>
> n阶无向完全图$K_n(n\geq 1)$的边的条数为$n(n-1)/2$.

题 5. 6阶无向完全图K_6的边的条数__15__.　　$\frac{6\times 5}{2}=$

答案：$6\times(6-1)/2=15$.

2. 通路与回路

设G为无向图，G中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \ldots e_{j_l} v_{i_l}$称作$v_{i_0}$到$v_{i_l}$的通路，其中$v_{i_{r-1}}, v_{i_r}$为$e_{j_r}$的端点，$r = 1, 2, \ldots, l$，$v_{i_0}, v_{i_l}$分别称为$\Gamma$的始点与终点，$\Gamma$中边的条数称作它的长度. 若又有$v_{i_0} = v_{i_l}$，则称$\Gamma$为回路.

3. 图的连通性

1) 设无向图$G = \langle V, E \rangle$，若$u, v \in V$之间存在通路，则称u, v是连通的，记作$u \sim v$.

规定：$\forall v \in V, v \sim v$.

若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为连通图，否则称G为非连通图.

2) 设$G = \langle V, E \rangle$是有向图，对G中任意两个结点u到v，若从u到v存在通路，则称u到v是可达的，否则称u到v不可达. 若从u到v存在通路，且从v到u存在通路，则称u和v是相互可达的.（规定一个结点到自己总是可达的）

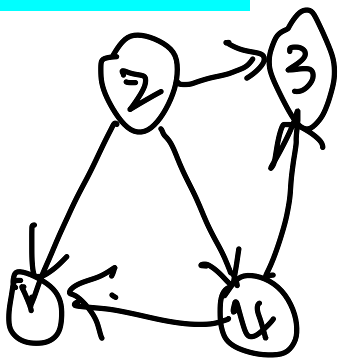
3) 设$G = \langle V, E \rangle$是有向图.

a) 如果图G任意两个结点至少从一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通的.

b) 如果图G任意两个结点间是相互可达的，则称G是强连通的.

c) 如果图G在略去有向边的方向后得到的无向图是连通的，则称G是弱连通的.

题 1. 已知有向图$D = \langle V, E \rangle$，其中，$E = \{\langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_4, v_1 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle\}$，$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，则$D$为（　）.



A. 弱连通图　　B. 强连通图　　C. 单向连通图　　D. 都不是

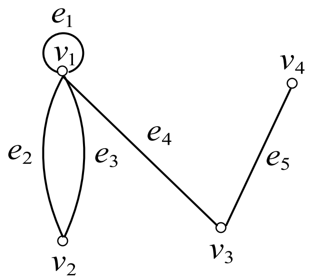
答案：A.

4. 图的矩阵表示

设无向图 $G=\langle V,E\rangle, V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}, E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$，令 m_{ij} 为顶点 $v_i=v_j$ 与边 e_j 的关联次数，则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵，记作 $M(G)$.

题 1. 图中所示的无向图的关联矩阵为

$$M(G)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



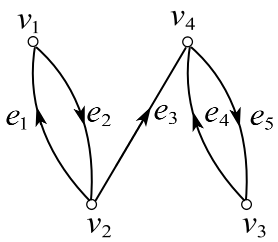
设有向图 v_i，v_j 中无环，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}, E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$，

$$m_{ij}=\begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的关联矩阵，记作 $M(D)$.

题 2. 图中所示的图 D 的关联矩阵为

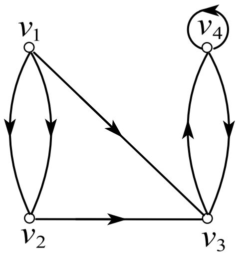
$$M(D)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



设有向图 $D=\langle V,E\rangle, V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$，令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 $v_i=v_j$ 邻接到顶点 v_j 的边的条数，则称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵，记作 $A(D)$，或简记为 A.

题 3. 图中所示的有向图D的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$



设A为有向图D的邻接矩阵，D的顶点集$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，则A的l次幂$A^l(l\geq 1)$中元素$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为l的通路数，其中$a_{ii}^{(l)}$为v_i到自身长度为l的回路数，而$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$为$D$中长度为$l$的通路（含回路）总数，其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$为$D$中长度为$l$的回路总数.

前面已经计算出有向图D的邻接矩阵A，下面给出A^2,A^3,A^4.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{pmatrix},A^4=\begin{pmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{pmatrix}$$

从$A^1\sim A^4$不难看出，D中v_2到v_4长度为$1,2,3,4$的通路分别为$0,1,1,2$条. v_4到自身长度为$1,2,3,4$的回路分别为$1,2,3,5$条，其中有复杂回路. D中长度小于等于4的通路有53条，其中有15条回路.

设$D=\langle V,E\rangle$为有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\0, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V, v_i\to v_i$，所以$P$主对角线上的元素全为1.

课时十一　练习题

1. 任何图中必定有偶数个（C）.

   A. 度数为偶数的结点　　B. 入度为偶数的结点

   C. 度数为奇数的结点　　D. 出度为奇数的结点

2. 设无向图 G 的度数列是 $(1,2,3,4,2)$，则图的边数是 6.

3. 有向图 D 的度数列为 $(3,3,4,3)$，出度列为 $(2,3,1,1)$，则此图的入度列为 (1,0,3,2).

4. 一个无向图有四个结点，其中3个的度数是 $2,3,3$，则第4个结点的度数不可能是 B,D.

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

5. 对于下列序列，可构成简单无向图的度数序列为（D）.

   A. 3,3,4,4,5　　B. 0,1,3,3,4　　C. 1,1,2,2,3　　D. 1,1,2,2,2

6. 下列关于图连通性的描述中不正确的是 C B.

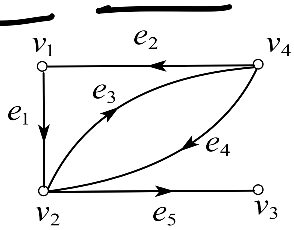
   A. 强连通图必然是单向连通的；　C. 单向连通图也必然是强连通的；

   C. 弱连通图未必是单向连通的；　D. 单向连通图必然是弱连通的.

7. 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图，$V=\{a,b,c,d,e,f\}$，$E=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle f,e\rangle\}$ 是（C）.

   A. 强连通图　　B. 单向连通图　　C. 弱连通图　　D. 不连通图

8. 写出下面的有向图的关联矩阵和邻接矩阵.



1 -1 0 0 0
-1 0 1 -1 1
0 0 0 -1
1 -1 1 0

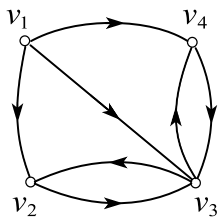
9. 设有向图 $G=\langle V,E\rangle, V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，若 G 的邻接矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$，则图 G 中共有 9 条边，v_1 的出度 $deg^+(v_1)=$ 2，v_1 的入度 $deg^-(v_1)=$ 3.

10. 已知图G的邻接矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则$G$有（ A ）.

A. 5 点，8 边　　B. 6 点，7 边　　C. 5 点，7 边　　D. 6 点，8 边

11. 设图D如图所示：

0111
0010
0101
0010

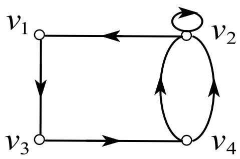


(1) 求D的邻接矩阵A；

(2) 求A^2，并说明从v_1到v_3的长为2的通路有多少条？

(3) D中长为2的通路一共有多少条？

12. 有向图G如图：



(1) 写出图G的邻接矩阵、可达矩阵；

(2) 求该图中长度为2的通路总数、回路总数；

(3) 判断该图是否为强连通图？（不必说明理由）

[illegible].

课时十二　欧拉图与哈密顿图

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 欧拉图	★★★★	0～6	选择、填空、判断
2. 哈密顿图	★★★	0～4	
3. 最短路问题	★★★	0～8	解答

1. 欧拉图

1) 通过图中所有边一次且仅一次的通路称作欧拉通路.
2) 通过图中所有边一次且仅一次的回路称作欧拉回路.
3) 具有欧拉回路的图称作欧拉图.
4) 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作半欧拉图.
5) 无向图G是欧拉图当且仅当G是连通图且没有奇度顶点.
6) 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通图的且每个顶点的入度等于出度.

边　　　　　　　　　　　　　　　　通路

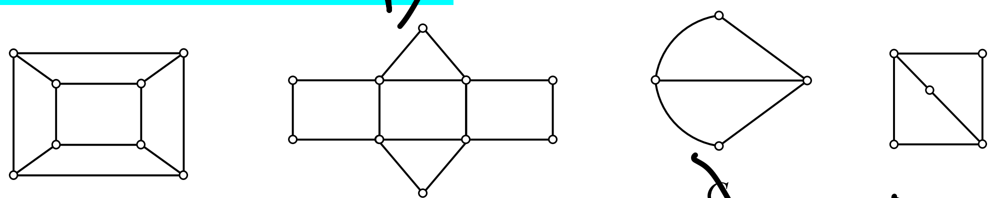
题 1. 判断：给定图G，若存在一条经过图中的每个结点恰好一次，这条路称作欧拉路.（ × ）

答案：错误.

题 2. 无向连通图G是欧拉图，当且仅当G中每一个顶点的度数都为 odd

答案：偶数.

题 3. 下列图形中为欧拉图的是（ B ）.



A　　　B　　　C　　　D

答案：B.

2. 哈密顿图

1） 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路.

2） 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路.

3） 具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称作半哈密顿图.

4） 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图.

5） 充分条件：

a） 设G是n阶无向简单图，若对于G中任意不相邻的顶点u,v，均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n-1$$

则G中存在哈密顿通路.

b） 设G是$n(n\geqslant 3)$阶无向简单图，若对于G中任意不相邻的顶点u,v，均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n$$

则G中存在哈密顿回路.

满足说明是哈密顿图，不满足则不能说明不是哈密顿图.

题 1. 设有无向图图 1，则（ A ）是一条汉密顿通路.

7

6

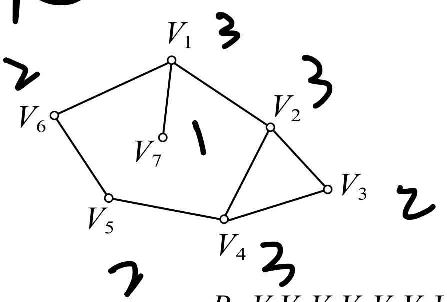


图 1

$A.\ V_7V_1V_6V_5V_4V_3V_2$　　　　$B.\ V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7$

$C.\ V_1V_2V_4V_5V_6$　　　　$D.\ V_2V_3V_4$

答案：A.

题 2. 设有无向图如图 2，则（ A ）是一条哈密顿回路.

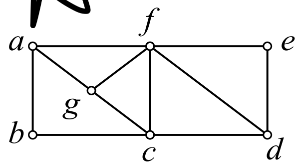


图 2

A. $gabcdefg$ B. $abcdefg$ C. $cfabcdeg$ D. $efgabcd$

答案：A.

3. 最短路问题

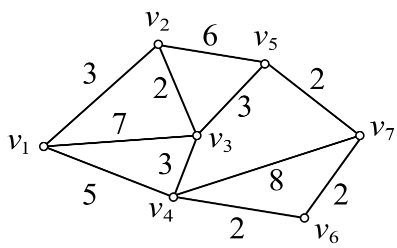
设图$G=<V,E>$（无向图或有向图），给定$W: E\rightarrow R$，对于G的每一条边e，称$W(e)$为边e的权，把这样的图称作带权图，记作$G=<V,E,W>$. 当$e=(u,v)\,(<u,v>)$时，把$W(e)$记作$W(u,v)$.

设P是G中的一条通路，P中所有边的权之和称作P的长度，记作$W(P)$，即$W(P)=\sum\limits_{e\in E(p)}W(e)$. 类似地，可以定义为回路$C$的长度$W(C)$.

设带权图$G=<V,E,W>$(无向图和有向图)，其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数. $\forall u,v\in V$，当u和v连通（u可达v）时，称从u到v长度最短的路径，为从u到v的最短路径，称其长度为从u到v的距离，记作$d(u,v)$. 约定：$d(u,u)=0$；当u和v不连通（u不可达v）时，$d(u,v)=+\infty$.

最短路问题：给定带权图$G=<V,E,W>$及顶点u和v，其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数，求从u到v的最短路径.

题 1. 带权图G如图所示，求从v_1到其余各点的最短路径和距离.



2 3 4 5 6 7
3 5 5 8 7 10 9

解：

顶点＼步骤	1	2	3	4	5	6	7
v_1	$\underline{0}$						
v_2	$+\infty$	3					
v_3	$+\infty$	7	5				
v_4	$+\infty$	5	5	5			
v_5	$+\infty$	$+\infty$	9	8	8	8	
v_6	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	7		
v_7	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	13	9	9
	0	3	5	5	7	8	9
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7

从 v_1 到其余各点的最短路径和距离如下：

v_1v_2　　$d(v_1,v_2)=3$

$v_1v_2v_3$　　$d(v_1,v_3)=5$

v_1v_4　　$d(v_1,v_4)=5$

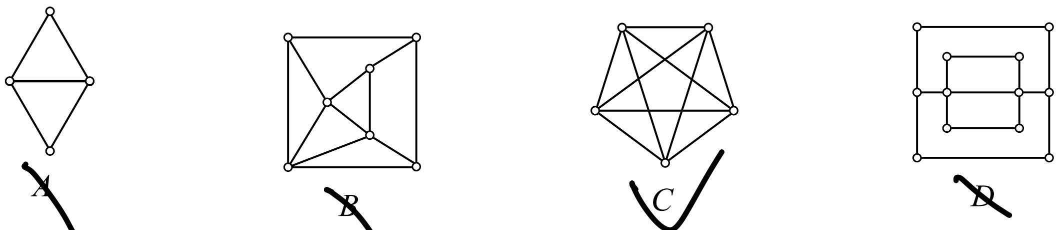
$v_1v_2v_3v_5$　　$d(v_1,v_5)=8$

$v_1v_4v_6$　　$d(v_1,v_6)=7$

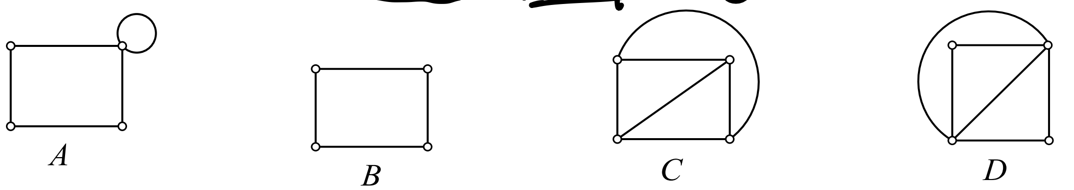
$v_1v_4v_6v_7$　　$d(v_1,v_7)=9$

课时十二　练习题

1. 有向连通图是欧拉图的充分必要条件是 od = id.
2. 连通无向图G含有欧拉回路的充分必要条件是 无奇数点.
连
3. 下图中，（ C ）是欧拉图.



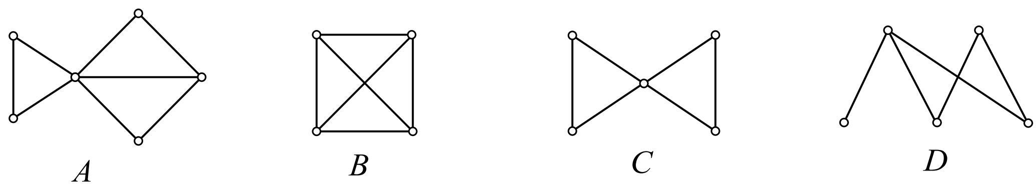
4. 下列的4个图中，不是欧拉图的是（ ~~A+C~~ C ）.



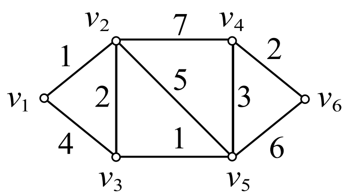
5. 若图有穿梭于图G的每条边一次且仅一次的回路，该图为（ B ）.

   A. 半欧拉图　　B. 欧拉图　　C. 半哈密顿图　　D. 哈密顿图

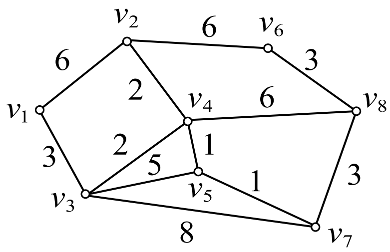
6. 无向图中有哈密顿回路的必要条件是任意两对结点度数之和大于~~$n-1$~~ n.
7. 下图中，是哈密顿图的为（ B ）.



8. 用$dijkstra$算法求下图所示带权图中v_1到其余各顶点的最短路径.



9. 用 *dijkstra* 标号法求下图中从 v_1 到其余顶点的最短路径和距离.



课时十三　树

考点	重要程度	分值	题型
1. 无向树及其性质	★★★★	4～6	选择、填空、判断
2. 最小生成树	★★★★★	0～6	解答
3. 根数及其应用	必考	10～12	解答

1. 无向树及其性质

1） 连通无回路的无向图称作无向树，或简称为树.

在无向树中，度数等于1的顶点称作树叶，度数大于等于2的顶点称作分支点.

2） 设$G = <V,E>$是n阶m条边的无向图，则下列各命题是等价的.

a） G是树.

b） G中任意两个顶点之间存在唯一的路径.

c） G是无回路且$m = n-1$.

d） G是连通的且$m = n-1$.

3） 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

题 1. 无向简单图是棵树，当且仅当（A）.

A. G连通并且边数比节点数少1　　B. G连通并且节点数比边数少1

C. G的边数比节点数少1　　D. G中没有回路

答案：A

题 2. 边数等于节点数减1的无向图是树.（ ）　×

答案：错误

$5\times4/2=10$

题 3. 设G是5个顶点的完全图，则从G中删除（ 4 ）条边可以得到树.

$A.4$　　　$B.5$　　　$C.6$　　　$D.10$

答案:C

$2+1+3$　　$4+3+12=19$

题 4. 一棵树有两个2度顶点，1个3度顶点和3个4度顶点，则1度顶点数为（ C ）.

$A.5$　　　$B.7$　　　$C.9$　　　$D.8$

$3+3=6$

答案：C

$6+n=19+n$

设1度顶点数为t，根据握手定理.

$$1\times t+2\times2+1\times3+3\times4=2(t+2+1+3-1)$$

$2(6+n-1)=19+n$

2. 最小生成树

1) 设$G=<V,E>$，$G'=<V',E'>$为两个图，若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，则称G'为G的子图，若$V'=V$，则称G'为G的生成子图.

$12+n-2=19$

$n=9$

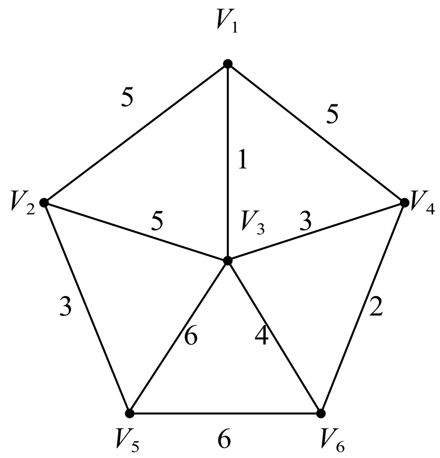
2) 如果无向图G的生成子图T是树，则称T是G的生成树.

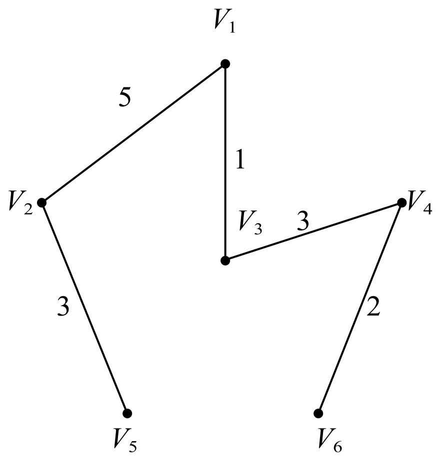
3) 设无向连通带权图$G=<V,E,W>$，T是G的一棵生成树，T的各边权之和称为T的权，记作$W(T)$.

4) 无向图G有生成树当且仅当G是连通图.

5) G的所有生成树中权最小的生成树称为G的最小生成树.

题 1. 设赋权无向连通图G如下，求G的最小生成树，并求该最小生成树的权总和.





步骤：①给权排序.　　1,2,3,3,4,5,5,5,6,6

②描点，将边数置零.

③选边（权最小，且不构成回路）.

④一直重复第三步，直到边数=顶点数-1 结束.

$W(T)=1+2+3+3+5=14$

3. 根数及其应用

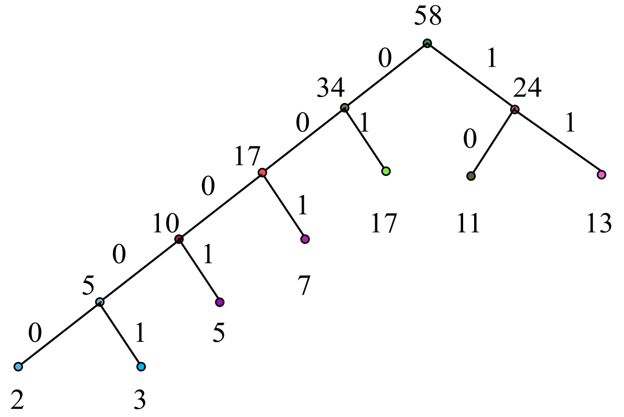
1) 若有向图的基图是无向树，则称这个有向图为有向树. 一个顶点的入度为0，其余顶点的入度为1的有向树称作根树，从树根到任意顶点V的路径长度（即路径中的边数）称作V的层数.

2) 设T为一棵非平凡的根树，$\forall v_i, v_j \in V(T)$，若可$v_i$达$v_j$，则称$v_i$为$v_j$的祖先，$v_j$为$v_i$的后代；若$v_i$邻接到$v_j$（即$<v_i, v_j> \in E(T)$），则称$v_i$为$v_j$的父亲，而$v_j$为$v_i$的儿子，若$v_j$，$v_i$的父亲相同，则称$v_j$与$v_i$是兄弟.

若T的每个分支点至多有r个儿子，则称T为r叉树.

3) 设二叉树T有t片树叶$V_1, V_2, \cdots, V_t$，权分别为$W_1, W_2, \cdots W_t$，称$W(T)=\sum_{i=1}^{t} W_i l(V_i)$为$T$的权. 其中$l(V_i)$是$V_i$的层数，在所有有$t$片树叶，带权$W_1, W_2, \cdots W_t$的二叉树中，权最小的二叉树称作最优二叉树.

题 1. 用算法 $Huffman$ 计算一组权为 $2,3,5,7,11,13,17$ 的最优二叉树，并求它们的权值.



$5\times2+5\times3+4\times5+3\times7+2\times11+2\times13+2\times17=148$

或 $5+10+17+34+58+24=148$

4) 设 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n$ 是长为 n 的符号串，称其子串 $\alpha_1,\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为该符号串的前缀. 设 $A=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 是一个符号串集合，若 A 的任意两个符号串都互不为前缀码. 由 $0-1$ 符号串构成的前缀码称作 2 元前缀码，由最优二叉树产生的前缀码为最佳前缀码.

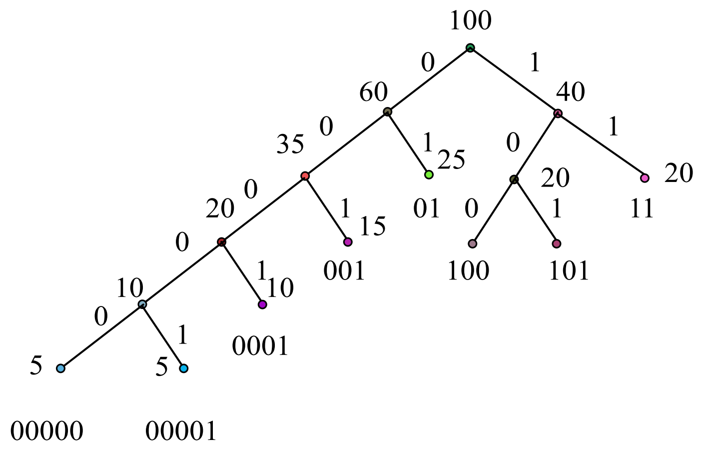
题 1. 下面给出的符号串集合中，构成前缀码的是（ C ）.

$A.\{b,c,aa,ac,aba,abb,aaa\}$　　$B.\{b,c,a,aa,ac,aba,abb,abc\}$

$C.\{b,c,aa,ac,aba,abb,adc\}$　　$D.\{b,c,aa,ac,aba,abb,aac\}$

答案：C

题 2. 在通信中，设八进制数字出现的频率（%）如下：0:25,1:20,2:15,3:10,4:10,5:10,6:5,7:5 采用2元前缀码，求传输数字最少的2元前缀码，画出最优树，并求传输10^n个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？



解：用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，用*Huffman*算法求最优二叉树，如图所示，它产生的最优前缀码为

01 传0	11 传1
001 传2	100 传3
101 传4	0001 传5
00000 传6	00001 传7

传输100个按题中给定的频率出现的八进制数字所用二进制数字个数等于，它等于各分支点权之和：$W(T)=10+20+35+60+100+40+20=285$

传输10^n个按题中给定频率出现的八进制数字需要$10^{n-2}\times 285=2.85\times 10^n$个二进制数字，而用长为3的0,1组成的符号串传输$10^n$个八进制数字要用$3\times 10^n$个二进制数字.

课时十三　练习题

1. 下面哪一种图不一定是树（ C ）.

   A. 无回路的连通图　　B. 有 n 个顶点 $n-1$ 条边的连通图

   C. 每对顶点之间都有通路的图　　D. 连通但删去一条边则不连通的图

2. n 阶非平凡的无向树至少有（ A ）片树叶.

   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 设图 G 是有 6 个顶点的连通图，总度数为 20，则从 G 中删去（ B ）边后使之变成树.

   10　5

   A. 10　　B. 5　　C. 3　　D. 2

4. 一颗无向树 T 有 5 片树叶，3 个 2 度分支点，其余的分支都是 3 度顶点，则 T 有 11 个顶点.

   $(5+6+3x)/2=5+3+x-1$

5. 无向图 G 具有生成树，当且仅当 G 为连通图. G 的所有生成树中 边权和最小 的生成树称为最小生成树.

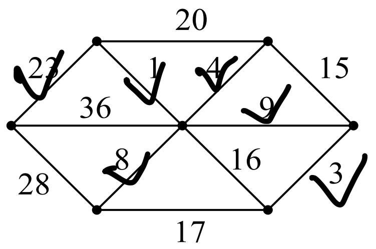
6. 图中所示为 7 个城市间直接通信线路的预测造价，则各个城市之间能够通信的最小总造价为： D .

   A. 72

   B. 40

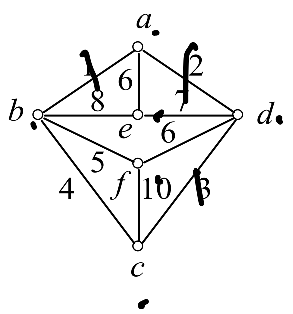
   C. 59

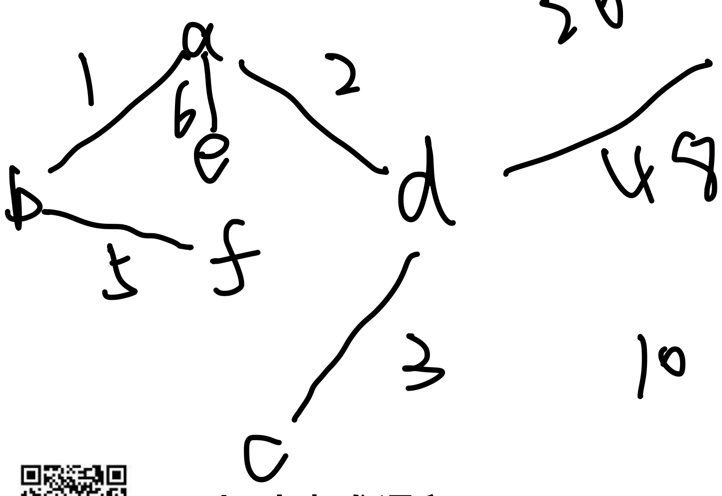
   D. 48



11
12
26

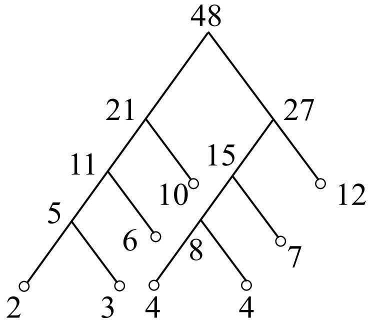
7. 下图为一连通赋权图，计算该图的最小生成树和权值.





6　17　　10 17

8. 用$Huffman$算法计算带权$2,3,4,4,6,7,10,12$的最优2叉树T，并求$W(T)$.



W(T)=135

9. 下面给出的符号串集合中，哪一个不是前缀码？（ B

A. $\{0,10,110,1111\}$ B. $\{1101,1001,101,110\}$

C. $\{01,001,000,10\}$ D.$\{b,c,aa,ac,aba,abc\}$

10. 设在通讯中a,b,c,d,e,f,g这7个字母，传输出现的频率分别如下：

a:35% b:20% c:15% d:9% e:11% f:5% g:5%

(1) 画出相应的最优二叉树.

(2) 并写出每个字母对应的前缀码.

课时十四 平面图

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 平面图的基本概念	★★★	0～4	选择
2. 欧拉公式	★★★	0～6	选择、解答

1. 平面图的基本概念

1) 设无向图$G=<V,E>$，若能将V划分成V_1和V_2（即$V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\varnothing$且$V_1\neq\varnothing$，$V_2\neq\varnothing$），使得G中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称G为二部图. 又若G是二部图，V_1中的每个顶点均与V_2中的所有顶点相邻，则称G为完全二部图，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

2) 如果能将无向图G画在平面上使得除顶点处外无边相交，则称G为可平面图，简称为平面图.

   a) K_1（平凡图），K_2，K_3，K_4都是平面图，K_5-e（K_5删除任意一条边）也是平面图，完全二部图$K_{1,n}(n\geq 1)$，$K_{2,n}(n\geq 2)$也都是平面图.

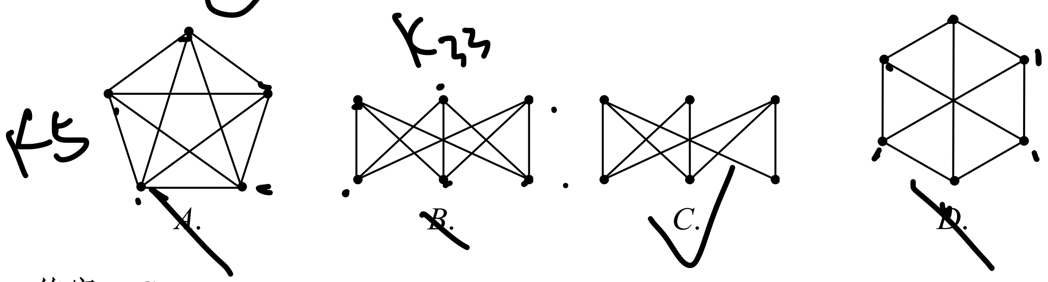
   b) K_5和$K_{3,3}$，它们都是非平面图.

3) 给定平面图G的平面嵌入，G的边将平面划分成若干个区域，每个区域都称作G的一个面，包围每个面的所有边的回路组称作该面的边界，边界的长度称作该面的次数.

4) 平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

5) 若在非平面图G中任意删除一条边，所得的图是平面图，则称G是极小非平面图. K_5和$K_{3,3}$都是极小非平面图.

题 1. 图中（ C ）是平面图.



答案：C.

2. 欧拉公式

连通平面图 G 的顶点数、边数和面数分别为 n,m 和 r，则有 $n-m+r=2$.

题 1. 设 G 是连通平面图，有 5 个顶点，6 个面，则 G 的边数是（ C ）.

$11-2=x$

9

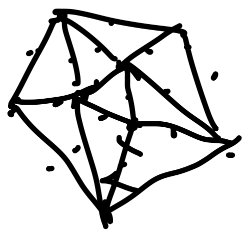
$A.5$ 条　　$B.6$ 条　　$C.9$ 条　　$D.11$ 条

$5-x+6=2$

答案：C

题 2. 图 G 是一个简单的连通平面图，顶点数为 8，其无限面的次数为 5，其余面都为三角形，(次数为 3)，计算平面图的边数和面数.

解：设平面图 G 的边数为 m，面数为 r.



22

$$\begin{cases} 8-m+r=2 \\ 5+3(r-1)=2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=16 \\ r=10 \end{cases}$$

$8-x+16=2$

8

因此，平面图 G 的边数为 16，面数为 10.

设 G 是 $n(n\geqslant 3)$ 阶 m 条边的简单平面图，则 $m\leqslant 3n-6$.

注：一个简单连通图，若不满足 $m\leqslant 3n-6$，则一定是非平面图，但满足该不等式的简单连通图未必是平面图.

题 1. 设图 G 有 V 个结点 e 条边，当 $V>3$，若不满足 $e\leqslant 3V-6$，它一定不是平面图.（ ）

答案：正确

课时十四　练习题

1. 5个结点的简单平面图的边数最多是（ C ）.

   $A.7$　　$B.8$　　$C.9$　　$D.10$

2. 二部图$K_{2,3}$是（ D ）.

   $A.$欧拉图　　$B.$哈密顿图　　$C.$非平面图　　$D.$平面图

3. 若简单连通图G有4个结点，3个面，则G有（ C ）条边.

   $4-x+3=2$

   $A.3$　　$B.4$　　$C.5$　　$D.2$

4. 图G是一个简单且连通的平面图，顶点数为11，其无限面的次数为8，其余有限面的次数都为6，计算平面图的边数和面数.

   面x，边:y　13

5. G为n个结点m条边，每个面的的次数至少为4的连通平面图，证明：$m \leqslant 2n-4$.

$11-y+x=2$

4. $\begin{cases} 11-y+x=2 \\ 8+6(x-1)=2y \end{cases}$

$8+6x-6=2y$

$6x+2=2y$

$9+x=y$

$9+x=-7+6x$

$16=4x$

$x=4$

$-7+5x=y$

$20-7=y$